

2020

STAHLBAU KALENDER



Sonderdruck:

Schwingungsverhalten ausgewählter
Baukonstruktionen

Dr.-Ing. Roland Friedl,

Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig



dynamisch – digital – visionär

Die bulicek + ingenieure gmbh ist ein überregional agierendes Ingenieureunternehmen mit Niederlassungen in München und Passau. In den Kompetenzbereichen Brücken-, Ingenieur- und Hochbau erbringen wir alle Ingenieurleistungen auf dem Gebiet der Objekt- und Tragwerksplanung. Darüber hinaus sind wir in der bautechnischen Prüfung statisch-konstruktiver Unterlagen sowie in der Erstellung von Gutachten tätig.

Tolle Projekte haben viele Konzerne.
Bei uns bearbeitet JEDER eines!
... EGAL VON WO.

www.bulicek.de



bulicek+ingenieure



muenchen@bulicek.de
Tel. 089 189 41 43 - 0

6

Schwingungsverhalten ausgewählter Baukonstruktionen

Dr.-Ing. Roland Friedl

Prof. Dr.-Ing. Ingbert Mangerig

Stahlbau-Kalender 2020: Neue Normung im Hochbau – Leichtbau.

Herausgegeben von Ulrike Kuhlmann

© 2020 Ernst & Sohn GmbH & Co. KG. Published 2020 by Ernst & Sohn GmbH & Co. KG.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung 387		
2	Zur Quantifizierung der Schwingungsreaktion mechanischer Systeme 387		
2.1	Freie Schwingungen gedämpfter Einfreiheitsgradsysteme 387	3.2.1	Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung 421
2.2	Erzwungene Schwingungen gedämpfter Einfreiheitsgradsysteme 390	3.2.2	Strukturelle Dämpfung 423
2.2.1	Harmonische Anregung 390	3.3	Bestimmung von Ersatzfedersteifigkeiten 423
2.2.2	Einschwingvorgänge 394	3.4	Massenträgheitsmomente 423
2.2.3	Periodische Anregung 395	3.5	Eigenfrequenzen und Eigenformen ausgewählter Schwingungssysteme 423
2.2.4	Transiente Anregung – Stoßbelastung 398		
2.2.5	Regellose Systemanregung 404	4	Messen von Bewegungsgrößen 430
2.3	Mehrfreiheitsgradsysteme 412	4.1	Auswertung diskreter Zeitschriebe 430
2.3.1	Lösung als gekoppeltes DGL-Systems – Frequenzgangmatrizen 412	4.2	Messtechnik und praktische Hinweise 430
2.3.2	Modalanalyse 415		
3	Modellbildung und Idealisierung von Baukonstruktionen 420	5	Ausgewählte Schwingungsphänomene 433
3.1	Modale Größen ausgewählter Schwingungssysteme 420	5.1	Schwingungsdämpfer 433
3.2	Zum Ansatz der Dämpfung in baulastdynamischen Berechnungen 421	5.2	Erdbeben 438
		5.3	Aeroelastische Schwingungsphänomene 442
		5.3.1	Böenerregte Bauwerksschwingungen 443
		5.3.2	Wirbelerregte Querschwingungen 446
		5.3.3	Bewegungsinduzierte Schwingungen 449
		5.3.3.1	Galloping 450
		5.3.3.2	Flattern und Divergenz 451
		6	Literatur 453

1 Einleitung

Sämtliche massebehafteten Konstruktionen stellen grundsätzlich schwingungsfähige Systeme dar. Erfahren diese eine Beschleunigung, so wirken neben den äußeren Einwirkungen und Lagerkräften darüber hinaus Massenträgheitskräfte, die es bei der Dimensionierung zu berücksichtigen gilt. Der vorliegende Beitrag umfasst die Behandlung verbreiteter Schwingungsphänomene ausgewählter Baukonstruktionen unter Berücksichtigung tieffrequenter globaler Schwingungsformen. Für höherfrequente kontinuumsmechanische Schwingungseffekte sowie für Schwingungserscheinungen im Bereich des Baugrunds oder des Luftschalls wird auf die einschlägige Literatur sowie exemplarisch auf den Beitrag [6] im Stahlbau-Kalender 2008 verwiesen.

Ziel ist primär, das Verständnis für dynamische Effekte zu schärfen und nicht im Detail auf theoretische Herleitungen sowie Feinheiten der programmtechnischen Umsetzung einzugehen. Wichtig ist den Verfassern jedoch die Vermittlung grundlegender Zusammenhänge, die den geübten Leser in die Lage versetzen sollen, wesentliche Anforderungen insbesondere an die Modellierung schwingungsfähiger Systeme zu definieren und darauf aufbauend eine fundierte Wahl eines geeigneten Rechenansatzes zu treffen. Unter Modellbildung wird in diesem Zusammenhang zum einen die Überführung einer realen Konstruktion in ein mechanisches Ersatzmodell verstanden, d. h. dessen Beschreibung auf der Basis von Seil-, Balken-, Platten, Scheiben- oder Schalenmodellen unter besonderer Berücksichtigung der vorliegenden Randbedingungen in Auflager- oder Kopfbereichen. Zum anderen zählt dazu auch die Wahl der Lösungsmethode für das im ersten Schritt gewählte mechanische Modell bzw. das daraus resultierende Differenzialgleichungssystem. Dabei kann entweder die Lösung der partiellen Schwingungsdifferenzialgleichung eines kontinuierlichen Systems oder eine Diskretisierung des Tragwerkmodells und damit eine Überführung in eine gewöhnliche Differenzialgleichung vorgenommen werden. Die daran anschließende Lösung der Bewegungsdifferenzialgleichung erfolgt entweder exakt auf der Basis von Faltungsintegralen und Integral-Transformationsmethoden oder genähert über Reihenansätze oder eine numerische Integration.

Darüber hinaus wird neben der vielfach in der Literatur zu findenden Beschreibung qualitativer Zusammenhänge besonders Wert auf die Herausstellung der praktischen Umsetzung sowie der quantitativen Bewertung von Schwingungssystemen, insbesondere mit Blick auf die dafür notwendige Abschätzung maximaler Schwingungsschwingungsamplituden oder in Unterkonstruktionen weitergeleiteten dynamischen Kräfte, gelegt.

Aufgrund des in Teilbereichen eher phänomenologisch angelegten Beitrags werden oftmals aufwendige Herleitungen wichtiger mathematischer wie mechanischer Zusammenhänge nur ansatzweise wiedergegeben oder werden aufgrund des begrenzten Umfangs gänzlich ausgespart. Dem interessierten Leser sei hier exempla-

risch für die Vielzahl sehr guter Veröffentlichungen folgende subjektive Auswahl an einschlägiger Literatur empfohlen [1, 2, 3, 8].

2 Zur Quantifizierung der Schwingungsreaktion mechanischer Systeme

2.1 Freie Schwingungen gedämpfter Einfreiheitsgradsysteme

Einleitend werden die physikalischen Grundlagen des für praktische Belange interessierenden idealisierten Modells eines schwach gedämpften Einfreiheitsgradschwingers, bestehend aus einem Massenpunkt m [kg], einem linearen Federelement k [N/m] sowie einem energiedissipierenden Dämpfungselement d [Ns/m] in Erinnerung gerufen. Auf die Ableitung dieser idealisierten Ersatzgrößen für reale Baukonstruktionen wird im Abschnitt 3 zur Modellbildung noch näher eingegangen. Jede noch so komplexe Konstruktion mit linearen Systemeigenschaften kann über eine sogenannte modale Transformation in ein System kinetisch äquivalenter Einfreiheitsgradsysteme überführt werden, sodass sich auf der Basis dieses einfachen Systems bereits eine ganze Reihe Schwingungen betreffender Fragestellungen dem Grunde nach diskutieren und bewerten lässt. Wird die statische Ruhelage als Bezugslage gewählt, so kann die Wirkung des Eigengewichts aus der Schwingungsuntersuchung eliminiert werden. Vorwiegend aufgrund mathematischer Gesichtspunkte wird i. d. R. von einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft ausgegangen (s. hierzu auch Abschnitt 3.2 zum Ansatz der Dämpfung), was die Lösung der zugrunde liegenden Schwingungsdifferenzialgleichung für die Auslenkung $u(t)$,

$$m\ddot{u}(t) + d\dot{u}(t) + ku(t) = p(t) \quad (1)$$

welche aus Gleichgewichtsbetrachtungen am verformten Schwingungssystem ermittelt werden kann, auf der Basis eines Exponentialansatzes $u(t) = Ce^{\lambda t}$ erlaubt. Zur Beschreibung der Dämpfungseigenschaften existiert eine Reihe redundanter und ineinander überführbarer Dämpfungsparameter (s. a. Tabelle 1), weshalb hier beim Vergleich entsprechender Literaturquellen und Angaben besondere Vorsicht geboten ist. Auch sind die den einzelnen Dämpfungskennwerten zugeordneten Nomenklaturen nicht einheitlich.

Wird zur Beschreibung des Dämpfungsverhaltens die sogenannte Abklingkonstante $\delta = d/2m$ herangezogen, so folgt mit der Eigenkreisfrequenz des zugeordneten konservativen, d. h. ungedämpften Schwingungssystems $\omega_0^2 = k/m$ die Lösung der sog. charakteristischen Gleichung zu

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = \delta \pm \sqrt{\left(\frac{\delta}{\omega_0}\right)^2 - 1} \\ &= \delta \pm \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Tabelle 1. Redundante Parameter geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung [7]

	Dämpfungs- koeffizient	Abkling- konstante	Grad der kritischen Dämpfung	Logarithmisches Dekrement	Verlustfaktor
	c	δ	D	Λ	η
c bzw. $d =$	c	$2m\delta$	$2 D \sqrt{km}$ $2 D m \omega_E$	$2\Lambda \sqrt{\frac{km}{4\pi^2 + \Lambda^2}}$	$\eta \sqrt{km}$
$\delta =$	$\frac{c}{2m}$	δ	$\omega_E D$	$\frac{\omega_E \Lambda}{4\pi^2 + \Lambda^2}$	$\frac{\eta}{2} \omega_E$
$D =$	$\frac{c}{2\sqrt{km}}$	$\frac{\delta}{\omega_E}$	D	$\frac{\Lambda}{4\pi^2 + \Lambda^2}$	$\frac{\eta}{2}$
$\Lambda =$	$\frac{2\pi c}{\sqrt{4km - c^2}}$	$\frac{2\pi\delta}{\sqrt{\omega_E^2 - \delta^2}}$	$\frac{2\pi D}{\sqrt{1 - D^2}}$	Λ	$\frac{\pi \eta}{\sqrt{1 - (\eta/2)^2}}$
$\eta =$	$\frac{c}{\sqrt{km}}$	$\frac{\delta}{\sqrt{\pi} f_0}$	$2D$	$\frac{2\Lambda}{4\pi^2 + \Lambda^2}$	η

wenn mit $D = d/d_{\text{crit}} = \delta/\omega_0 = d/2m\omega_0$ zusätzlich das sog. Lehr'sche Dämpfungsmaß, auch als Grad der kritischen Dämpfung bezeichnet, eingeführt wird. Im Allgemeinen sind in Abhängigkeit des Lehr'schen Dämpfungsmaßes drei mögliche Fälle: $D < 1$, $D = 1$ und $D > 1$ zu unterscheiden. Für Baukonstruktionen ohne explizite Dämpfungselemente ist i. d. R. lediglich der Fall $D < 1$ von Bedeutung. In diesem Falle stellt die Lösung in Gl. (2) eine komplexe Größe

$$\lambda = -\delta \pm i\omega_D \quad (3)$$

dar, wobei mit $\omega_D = \sqrt{1 - D^2}$ die sog. gedämpfte Eigenkreisfrequenz bezeichnet wird. Diese ist über $\omega = 2\pi f$ mit der zugeordneten Eigenfrequenz $f = 1/T$, der Reziproken der in Sekunden gemessenen Schwingungsdauer T verknüpft. Als Schwingungsdauer wird die Zeitdifferenz zwischen zwei aufeinanderfolgenden gleichsinnigen Schwingungsnulldurchgängen verstanden. Während für die Fälle $D = 1$ sowie $D > 1$ lediglich

aperiodisch abklingende Bewegungen auftreten, stellen sich für den im Folgenden weiter betrachteten Fall $D < 1$ mit der Zeit abklingende Schwingbewegungen ein. Die allgemeine Lösung der Bewegungsdifferentialgleichung (1) folgt dann zu:

$$u(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin[\omega_D t] + C_2 \cdot \cos[\omega_D t]) \quad (4)$$

Werden für eine verschwindende äußere Anregung nunmehr die Anfangsbedingungen $u(0) = u_0$ und $\dot{u}(0) = v_0$ betrachtet, so ergeben sich die Freiwerte der homogenen Schwingungsdifferentialgleichung zu $C_1 = \frac{v_0 + u_0 \delta}{\omega_D}$ und $C_2 = u_0$ sowie die allgemeine Lösung zu (Bilder 1 und 2)

$$u(t) = e^{-\delta t} \cdot \left(\frac{v_0 + u_0 \delta}{\omega_D} \cdot \sin[\omega_D t] + u_0 \cdot \cos[\omega_D t] \right) \quad (5)$$

Schwingungsbewegungen infolge einer definierten Anfangsauslenkung können beispielsweise beim plötzli-

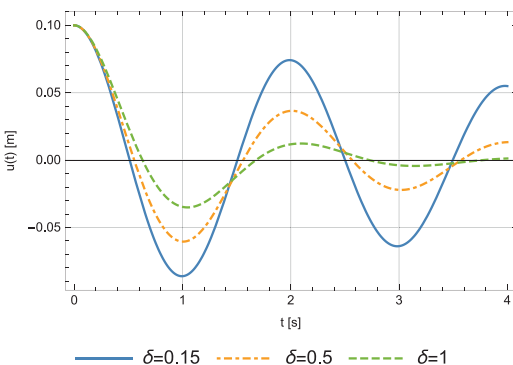


Bild 1. Homogene Lösung für $v_0 = 1$, $u_0 = 0$

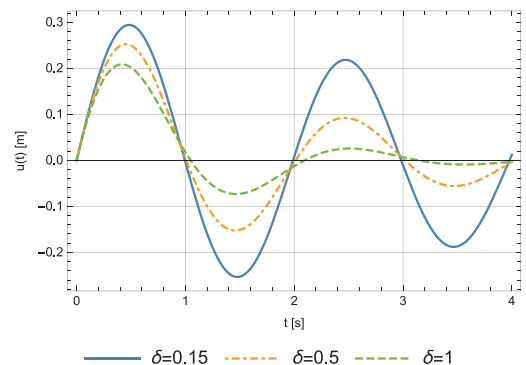


Bild 2. Homogene Lösung für $u_0 = 0.1$, $v_0 = 0$

chen Versagen eines Tragelements, wie z. B. eines Brückenhängers oder der Abspannung einer Vordachkonstruktion, auftreten. Die dabei anzusetzende Anfangsauslenkung ist aus der Verformungsdifferenz zwischen der alten und der neuen Gleichgewichtslage zu ermitteln. Eine vorgegebene Anfangsgeschwindigkeit kann hingegen aus einer vorausgegangenen Stoßbelastung resultieren. Wird die Größe des eingetragenen Impulses als bekannt vorausgesetzt, so folgt aus $I = m \cdot v$ schließlich die gesuchte Anfangsbedingung $v = I/m$ (s. hierzu auch Abschnitt 2.2.4).

Beispiel 1

Als Beispiel soll die Schwingungsreaktion des Hauptträgers einer Stabbogenbrücke infolge eines Hängerausfalls auf der Basis eines stark vereinfachten mechanischen Modells abgeschätzt werden (Bild 3).

Die Kraft in einem Hänger wird vereinfachend zu $55 \text{ kN/m} \cdot 12 \text{ m} = 660 \text{ kN}$ angenommen. Werden für die Abschätzung der Anfangsauslenkung die mit einem Hängerausfall verbundenen globalen Verformungen des Bogens sowie der Hänger im ersten Schritt vernachlässigt, so wird sich die tatsächliche Lösung zwischen den Grenzwerten eines beidseitig gelenkig gelagerten und eines beidseitig biegesteif eingespannten Einfeldträgers mit einer Spannweite von 24 m bewegen. Für diese Grenzwerte folgen die Durchbiegungen in Feldmitte infolge der in entgegengesetzter Richtung aufgetragenen Hängerkraft $F = 660 \text{ kN}$ bei Anwendung einschlägiger Tabellenwerke, zu

$$w = \frac{FL^3}{48EI} = \frac{660 \text{ kN} \cdot 2400^3 \text{ cm}^3}{48 \cdot 1,89 \text{ E11 kNcm}^2} = 0,96 \text{ cm}$$

für eine gelenkige Lagerung und

$$w = 192 = \frac{216 \text{ kN} \cdot 2400^3 \text{ cm}^3}{192 \cdot 1,89 \text{ E11 kNcm}^2} = 0,24 \text{ cm}$$

für den beidseitig eingespannten Fall.

Werden die in Abschnitt 3.1 aufgeführten Werte für die modalen Größen herangezogen, so folgen die modale Masse sowie die modale Steifigkeit zu

$$k_{\text{gelenk}} = \frac{48EI}{L^3} = \frac{48210 \text{ E9} \cdot 9 \text{ E} - 2}{24^3} = 65,62 \text{ E6 N/m}$$

$$m_{\text{gelenk}} = 0,5 \text{ mL} = 0,5 \cdot 5500 \cdot 24 = 66000 \text{ kg}$$

$$k_{\text{eingespannt}} = \frac{192EI}{L^3} = 262 \text{ E6 N/m}$$

$$m_{\text{gelenk}} = 0,4 \text{ mL} = 0,4 \cdot 5500 \cdot 24 = 52800 \text{ kg}$$

Die zur Grundsichwingform gehörigen Eigenfrequenzen $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ ergeben sich für die beiden Fälle

$$\text{zu } f_{\text{gelenk}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{65,62 \text{ E6}}{66000}} = 5,02 \text{ Hz sowie}$$

$$f_{\text{eingespannt}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{262 \text{ E6}}{52800}} = 11,2 \text{ Hz. Wird pauschal ein logarithmisches Dämpfungsdekrement von } \Lambda = 0,1 \text{ unterstellt, so folgt die Abklingkonstante für die erste Biegeeigenform zu } \delta_i = \frac{\omega_i \Lambda}{\sqrt{4\pi^2 + \Lambda^2}} \text{ und somit für das beid-$$

seitig gelenkig gelagerte Ersatzmodell zu $\delta_{\text{gelenk}} = 0,5$ sowie für den beidseitig eingespannten Fall zu $\delta_{\text{eingespannt}} = 1,12$. Damit resultieren die Schwingungswerten des Hauptträgers infolge eines plötzlichen Hängerausfalls (Bild 4) gemäß Gl. (5) zu

$$u_{\text{gelenk}}(t) = e^{-0,5t} \cdot \left(\frac{0 + 0,0096 \cdot 0,5}{2 \cdot \pi \cdot 5,02} \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot 5,02 t] + 0,0096 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot 5,02 t] \right)$$

und

$$u_{\text{eingesp.}}(t) = e^{-1,12t} \cdot \left(\frac{0 + 0,0024 \cdot 1,12}{2 \cdot \pi \cdot 11,2} \cdot \sin[2 \cdot \pi \cdot 11,2 t] + 0,0024 \cdot \cos[2 \cdot \pi \cdot 11,2 t] \right)$$



Bild 3. Stabbogenbrücke und statische Ersatzsysteme – Kenngrößen des Hauptträgers: $EI = 1,89 \text{ E11 kNcm}^2$, $m = 5500 \text{ kg/m}$, Hängerabstand $L = 12 \text{ m}$

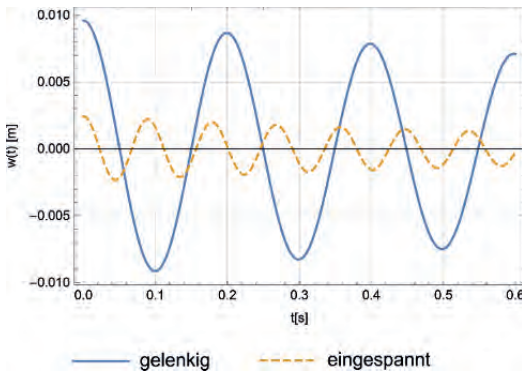


Bild 4. Schwingungsreaktion infolge eines Hängerausfalls

Insbesondere interessiert in diesem Zusammenhang häufig die Antwort auf die Frage nach der Schwingungsauslenkung über die statische Ruhelage hinaus. Wie aus obiger Überlegung ableitbar, stellt sich das sogenannte Überspringen für Systeme mit geringer Dämpfung in derselben Größenordnung wie die Anfangsauslenkung ein. Das bedeutet, dass an dieser Stelle mindestens ein baulicher Sicherheitsabstand in der Höhe der doppelten statischen Durchbiegungsdifferenz der beiden Systeme vorgehalten werden muss.

Erwähnenswert ist an dieser Stelle, dass infolge $\omega_D = \sqrt{1 - D^2}$ und $T_D = 2\pi / \omega_D$ die Eigenschwingzeit des gedämpften Systems stets größer als die des zugeordneten ungedämpften Systems ist. Aufgrund der meist geringen Dämpfung üblicher Baukonstruktionen $D \ll 1$ kann dieser Umstand jedoch häufig vernachlässigt und mit ausreichender Genauigkeit $\omega_D \approx \omega_0$ gesetzt werden. Wird das Verhältnis aufeinanderfolgender Maximalausschläge einer harmonischen Schwingbewegung gebildet, so folgt mit dem sog. Logarithmischen Dämpfungsdekrement Λ :

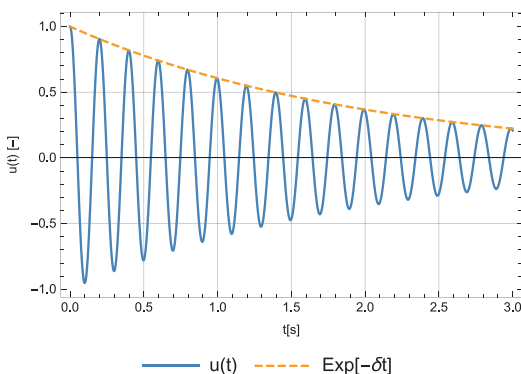


Bild 5. Ausschwingkurve einer harmonischen Schwingbewegung

$$\frac{A_i}{A_{i+k}} = e^{\delta \cdot 2\pi / \omega_D} \quad \text{bzw.}$$

$$\ln\left(\frac{A_i}{A_{i+n}}\right) = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{\delta}{\omega_D} = \Lambda \cdot n \quad (6)$$

Auf diese Weise lassen sich vergleichsweise einfach Dämpfungswerte aus gemessenen Schwingungsamplituden ermitteln (Bild 5). Bei geringen Dämpfungseigenschaften empfiehlt sich die Betrachtung höherer Werte für n, z. B. 5 oder 10 oder eine Mittelung mehrerer auf diese Weise ermittelter Parameter, um nie vermeidbare Fehler infolge von Ableseungenauigkeiten zu reduzieren.

2.2 Erzwungene Schwingungen gedämpfter Einfreiheitsgradsysteme

2.2.1 Harmonische Anregung

Die einfachste Form der erzwungenen Schwingungsanregung stellt eine harmonische, d. h. sinusförmige Anregung dar. Diese mathematische Idealisierung kann mit zumindest näherungsweise zutreffenden Resultaten auf viele Aufgaben der Dynamik angewandt werden, wie zum Beispiel unwuchterregte Beanspruchungen rotierender Bauteilkomponenten. Je nachdem, ob eine Krafterregung mit Angriffspunkt an der schwingenden Masse oder eine sog. Fußpunkterregung als harmonische Verschiebung des Auflagerpunkts vorliegt, kann die Einwirkung als

$$F(t) = F_0 \cdot \sin(\Omega t) \quad \text{bzw.}$$

$$u_F(t) = u_{F0} \cdot \sin(\Omega t) \quad (7)$$

dargestellt werden. Die Schwingungsdifferentialgleichung (1) folgt dann mit dem Ansatz in Gl. (7) zu

$$m\ddot{u}(t) + d\dot{u}(t) + ku(t) = F_0 \cdot \sin(\Omega t) \quad (8)$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung kann durch die Superposition der homogenen Lösung gemäß Gl. (5) und des noch zu ermittelnden Partikularanteils zu $w_{\text{tot}} = w_h + w_p$ ermittelt werden. Wird zur Bestimmung der Partikularantwort ein entsprechender Ansatz in der Form

$$w_p(t) = A \cdot \sin(\Omega t - \alpha) \quad (9)$$

zugrunde gelegt, wobei Ω die Erregerkreisfrequenz und α den sog. Phasenversatz der Schwingungsantwort darstellen, so folgen für die unbekannte Amplitude A und den Phasenversatz α

$$A = V(\Omega) w_{\text{stat}} = V(\Omega) \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \Omega^2 \cdot m)^2 + \Omega^2 \cdot d^2}} \quad (10)$$

und

$$\tan(\alpha) = \frac{\Omega \cdot d}{k - \Omega^2 \cdot m} \quad (11)$$

Wird im ersten Schritt lediglich der sogenannte eingeschwingene Zustand betrachtet, d. h. ausschließlich die Partikularlösung zugrunde gelegt, so lassen sich die Verhältnisse sehr anschaulich diskutieren, wenn das sogenannte Frequenzverhältnis $\eta = \Omega/\omega_0$ und die Vergrößerungsfunktion $V(\eta) = A/w_{\text{stat}}$ als Verhältnis der dynamischen Schwingungsamplitude zur statischen Auslenkung $w_{\text{stat}} = F_0/k$ betrachtet werden (Bilder 6 und 7). Die Vergrößerung für kriterregte Systeme folgt dann aus Gl. (10) in dimensionsloser Form zu

$$V(\eta) = \frac{A}{w_{\text{stat}}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot D \cdot \eta)^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + \frac{4\eta^2 \Lambda^2}{\Lambda^2 + 4\pi^2}}}$$
(12)

Für den Fall einer resonanten Anregung, d. h., dass Ω gegen ω_D strebt, kann der Maximalwert der Vergrößerungsfunktion für kleine Werte von Lambda zu

$V(\eta = 1) \approx \pi/\Lambda$ abgeschätzt werden. Daraus wird ersichtlich, dass für übliche Dämpfungswerte von $\Lambda = 0,01$ bis $0,1$ dynamische Überhöhungsfaktoren von 31,4 bzw. 31,4 auftreten und es auch bereits bei sehr geringen Krafteinwirkungen zu merklichen und oftmals bemesungsmaßgebenden Schwingungsreaktionen kommen kann.

Beispiel 2

Als anschauliches Beispiel für einen stationären Schwingungszustand soll eine aufgeständerte Maschinenkonstruktion, beispielsweise ein Getriebe- oder Turbinenprüfstand, unter Zugrundelegung zweier unterschiedlicher Aussteifungssysteme diskutiert werden. Die in den Bildern 10 und 11 dargestellte Konstruktion mit einer Höhe von 5,0 m wird durch die Unwucht rotierender Bauteile zu Schwingungen angeregt.

Die Gesamtmasse der betrachteten Anlage (Maschinenbauteile und Unterkonstruktion) betrage 2800 kg

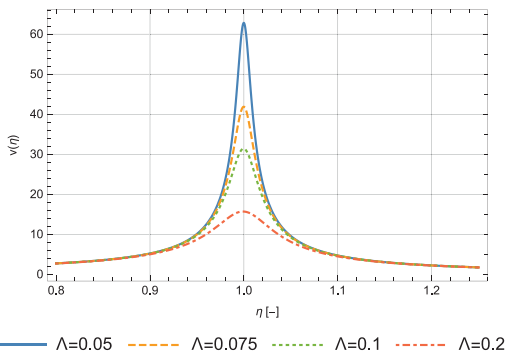


Bild 6. Vergrößerungsfunktionen in Abhängigkeit des logarithmischen Dämpfungsdekrements (geringe Dämpfung)

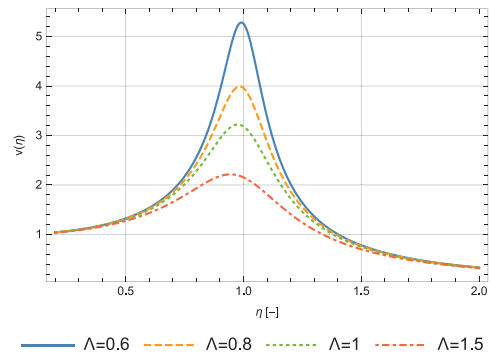


Bild 7. Vergrößerungsfunktionen in Abhängigkeit des logarithmischen Dämpfungsdekrements (hohe Dämpfung)

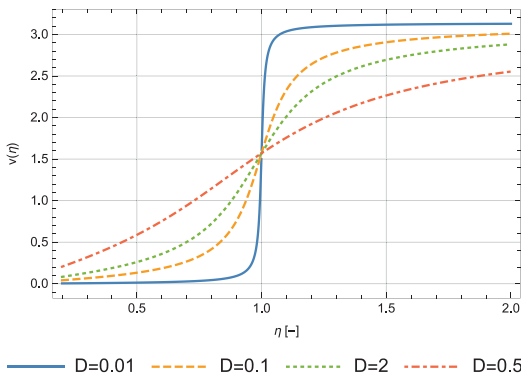


Bild 8. Phasenwinkel für ausgewählte Grade der kritischen Dämpfung

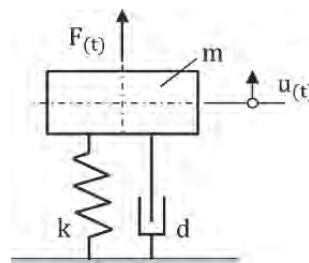
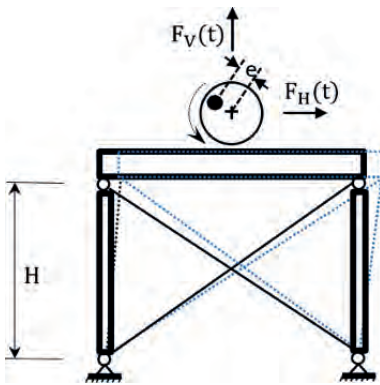
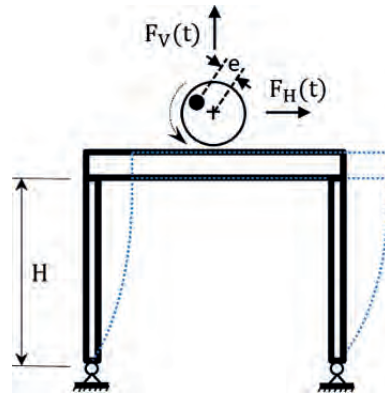


Bild 9. Mechanisches Modell eines Einfreiheitsgradschwingers



$$k_H = \frac{EA}{H} \cos(\alpha)^2 \sin(\alpha) = \frac{21000 \cdot 7,07}{500} \cos(45)^2 \sin(45) \\ = 105 \text{ kN/cm}$$

Bild 10. Aussteifung über Diagonalverband, Zugstrebe $d = 30 \text{ mm}$, harmonische Vertikalkraft aus Unwucht nicht betrachtet



$$k_H = 2 \frac{3EI}{L^3} = 2 \frac{3 \cdot 21000 \cdot 30820}{500^3} \\ = 31 \text{ kN/cm}$$

Bild 11. Aussteifung über Rahmentragwirkung, zwei HEB-320-Stiele mit einem unendlich steif angenommenen Rahmenriegel, harmonische Vertikalkraft aus Unwucht nicht betrachtet

und die Unwucht M_u wird mit 50 kg berücksichtigt. Werden lediglich die horizontalen Schwingbewegungen der Gesamtkonstruktion betrachtet, was aufgrund der stark unterschiedlichen Steifigkeiten der Prüfstandkonstruktion in vertikaler und horizontaler Richtung gerechtfertigt ist, so folgt die harmonische Horizontalkraft in Abhängigkeit der Rotationsgeschwindigkeit zu

$$F_H(t) = M_u \cdot e \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega t) \quad (13)$$

Wobei mit e die Exzentrizität der Unwuchtmasse und mit $\Omega = 2 \pi n/60$ die Kreisfrequenz der mit n Umdrehungen pro Minute rotierenden Masse bezeichnet werden.

Mit obigen Ersatzsteifigkeiten folgen die Eigenfrequenzen

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{für das System mit Diagonalverband}$$

bzw. Aussteifungsrahmen zu $9,75 \text{ Hz}$ bzw. $5,3 \text{ Hz}$. Bei einer Rotationsgeschwindigkeit von 600 U/min sowie einer wirksamen Exzentrizität der Unwuchtmasse von 10 cm ergibt sich eine schwingungsanfachende harmonische Horizontalkraft $F_H(t) = 50 \cdot 0,1 \cdot 62,83^2 \cdot \cos(62,83 \cdot t) = 19738 \text{ N} \cdot \cos(62,83 \cdot t)$. Die daraus resultierenden Schwingungsamplituden können für den stationären, d.h. eingeschwungenen Zustand über Gl. (10) ermittelt werden. Mit einem logarithmischen Dämpfungsdekrement von $\Lambda = 0,1$ und somit

$$d = 2\Lambda \sqrt{\frac{k m}{4\pi^2 + \Lambda^2}} = 2 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{\frac{3100000 \cdot 2800}{4 \cdot \pi^2 + 0,1^2}} \\ = 2965,2 \text{ Ns/m}$$

stellen sich die Maximalamplituden zu

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \Omega^2 \cdot m)^2 + \Omega^2 \cdot d^2}} \\ = \frac{19738}{\sqrt{(3100000 - 62,83^2 \cdot 2800)^2 + 62,83^2 \cdot 2965,2^2}} \\ = 0,00248 \text{ m}$$

für das Rahmensystem sowie

$$d = 2\Lambda \sqrt{\frac{k m}{4\pi^2 + \Lambda^2}} = 2 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{\frac{10500000 \cdot 2800}{4 \cdot \pi^2 + 0,1^2}} \\ = 5457,2 \text{ Ns/m} \quad \text{und}$$

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - \Omega^2 \cdot m)^2 + \Omega^2 \cdot d^2}} \\ = \frac{19738}{\sqrt{(10500000 - 62,83^2 \cdot 2800)^2 + 62,83^2 \cdot 5457,2^2}} \\ = 0,0303 \text{ m}$$

für das System mit der Diagonalverbandsaussteifung ein. Bei einem Vergleich obiger Maximalschwingungsamplituden sowie der in den Bildern 12 und 13 dargestellten Vergrößerungsfunktionen mit den hervorgehobenen Frequenzverhältnissen $\eta_{\text{diagonal}} = 10 \text{ Hz}/9,75 \text{ Hz} = 1,026$ und $\eta_{\text{Rahmen}} = 10 \text{ Hz}/5,3 \text{ Hz} = 1,89$ sowie den zugehörigen Werten $V(1,026) = 16,14$ und $V(1,89) = 0,4$ wird veranschaulicht, dass das vermeintlich steifere Aussteifungssystem aufgrund der resonanzähnlichen Anregung ca. 10-fach größere Horizontalschwingungsamplituden zur Folge hat.

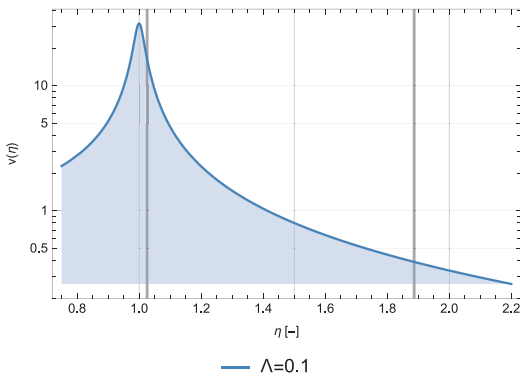


Bild 12. Vergrößerungsfunktion logarithmische Darstellung

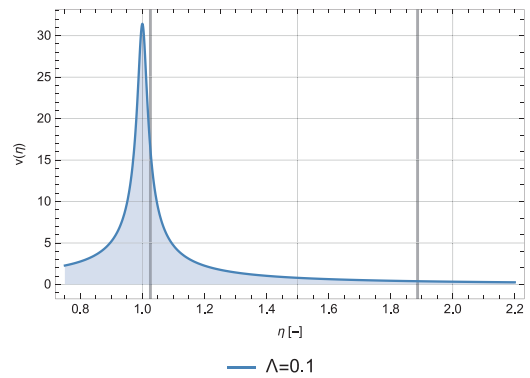


Bild 13. Vergrößerungsfunktion lineare Darstellung

Darüber hinaus soll auf der Basis der Bilder 12 und 13 verdeutlicht werden, dass die Darstellung der Vergrößerungsfunktion in logarithmischem Maßstab insbesondere im Falle geringer Systemdämpfung deutlich vorteilhafter sein kann.

Der Phasenwinkel α (Bild 8) ist ein Maß für das Nach-eilen der Schwingungsantwort $u(t)$ auf die mit der Erregerkreisfrequenz Ω ablaufende anregende Kraft $F(t)$. Für $\alpha > 0$ werden die maximalen Schwingungsaus-schläge erst mit einem zeitlichen Versatz zur maximalen Kraftamplitude erreicht. Dies trifft für sog. hoch abge-stimmte Systeme mit $\eta < 1$ und somit $\Omega < \omega_0$ zu, wobei für $\eta \rightarrow 0$ auch $\alpha \rightarrow 0$ strebt und die maximalen Schwingungsamplituden zeitgleich zur maximalen Kraftamplitude auftreten (statischer Grenzfall). Im Falle eines tiefabgestimmten Systems für $\eta \rightarrow \infty$ beträgt der Phasenversatz $\alpha = \pi$, d. h., das System schwingt in Gegenphase. Zu erwähnen ist weiterhin der Umstand,

dass die Vergrößerungsfunktion für $\eta < \sqrt{2}$ stets > 1 ist, und für größere Frequenzverhältnisse < 1 wird und gegen 0 strebt. Es liegt dann ein sogenanntes massedominiertes System vor, bei dem die Massenträgheitskraft so groß ist, dass die hochfrequente Kraftanregung das System nicht mehr nennenswert zum Schwingen anregen kann. Aus dieser Betrachtung kann die augenfällige Schlussfolgerung gezogen werden, dass Maschinenfundamente oder Unterkonstruktionen von Maschinen tief abgestimmt, d. h. $\Omega_{\text{Anregung}} \gg \omega_0$ gewählt werden sollte, da damit die in die Unterkonstruktion eingetragenen Kräfte deutlich kleiner als bei einer Hochabstimmung ausfallen (Bild 14). Jedoch ist dabei die unausweichliche Tatsache zu beachten, dass beim Anfahren und Abschalten der Maschinen der Resonanzbereich durchfahren werden muss. Nur beim Durchfahren dieses kritischen Bereichs $\Omega_{\text{Anregung}} \approx \omega_0$ in hinreichend kurzer Zeit kann erreicht werden, dass die resultierenden Schwingungsamplituden innerhalb vertretbarer Grenzen bleiben.

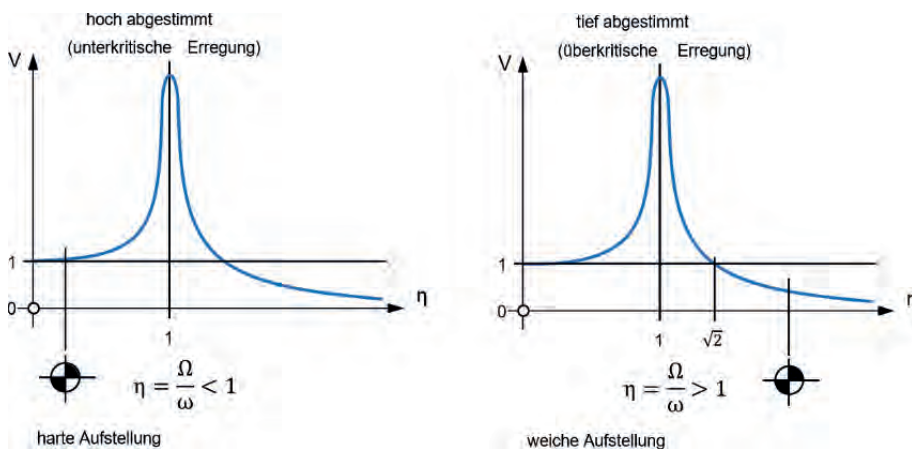


Bild 14. Schematische Darstellung unterschiedlicher Abstimmungsmöglichkeiten für Maschinenfundamente [2]

2.2.2 Einschwingvorgänge

Auch wenn häufig nur die stationäre Lösung des eingeschwungenen Zustands betrachtet wird, so können durchaus auch während der Einschwingvorgänge bestimmungsmaßgebende Schwingungsantworten auftreten. Ist die mit der homogenen Lösung der Differentialgleichung zu beschreibende Reaktion noch nicht abgeklungen, folgt die Gesamtlösung der Schwingungsantwort aus einer Superposition derselben mit der soeben diskutierten Partikularlösung.

$$u(t) = e^{-\delta t} \cdot (C_1 \cdot \sin[\omega_D t] + C_2 \cdot \cos[\omega_D t]) + A \cdot \sin[\Omega t - \alpha] \quad (14)$$

Die Freiwerte C_1 und C_2 sind in Abhängigkeit der Anfangsbedingungen u_0 und v_0 zu bestimmen und folgen zu

$$C_1 = -\frac{-\delta u_0 - v_0 + A \omega \cos[\alpha] - A \delta \sin[\alpha]}{\omega_D} \quad (15)$$

$$C_2 = u_0 + A \sin[\alpha]$$

Wie aus den vollständigen Schwingungsantworten in Bild 15 zu erkennen, hat das Dämpfungsverhalten der Konstruktion nicht nur einen Einfluss auf das Abklin-

gen der homogenen Lösung infolge vorgegebener Randbedingungen (in obigen Beispielen $u_0 = v_0 = 0$), sondern auch auf die erforderliche Anzahl an Schwingungszyklen, die für das Aufschaukeln im Resonanzfall erforderlich sind. Dies bedeutet, dass neben den dynamischen Überhöhungen auch die Anzahl der Schwingungszyklen bis zum Erreichen der maximalen Schwingungsamplitude mit sinkender Strukturdämpfung ansteigen.

Wenn für die dem Beispiel 2 zugrunde liegende Konfiguration der Einschwingvorgang berücksichtigt wird und der zeitliche Verlauf der Umdrehungsgeschwindigkeit bekannt ist, lässt sich daraus über Gl. (13) der zugehörige Zeitverlauf der interessierenden Horizontalkraft ermitteln. Da es sich jedoch um einen instationären, d. h. zeitlich veränderlichen Anregungsprozess handelt, sind für die Beurteilung des Einschwingvorgangs weitere Überlegungen erforderlich (s. hierzu die Fortsetzung zu Beispiel 2).

Im Falle einer harmonischen Fußpunkterregung $u_F(t) = w_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ kann die Bewegungsdifferentialgleichung zum einen für die Relativverschiebungen zwischen Massenpunkt und Fußpunkt $u_F(t)$ formuliert werden zu

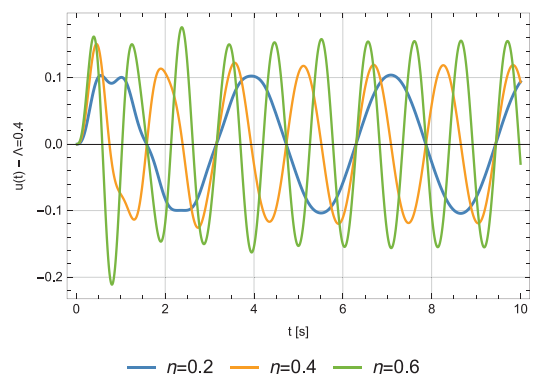
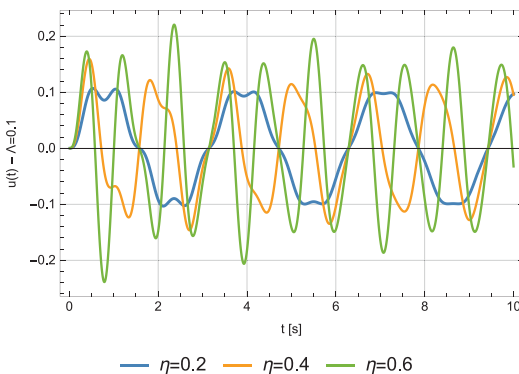
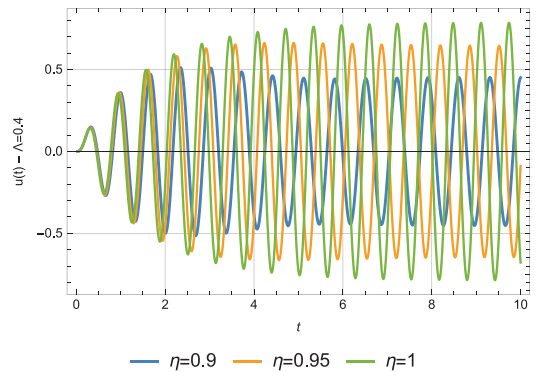
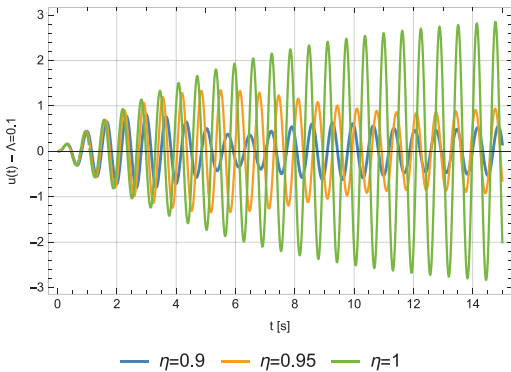


Bild 15. Exemplarische Darstellung von Einschwingvorgängen für unterschiedliche Dämpfungsparameter sowie unterschiedliche Frequenzverhältnisse

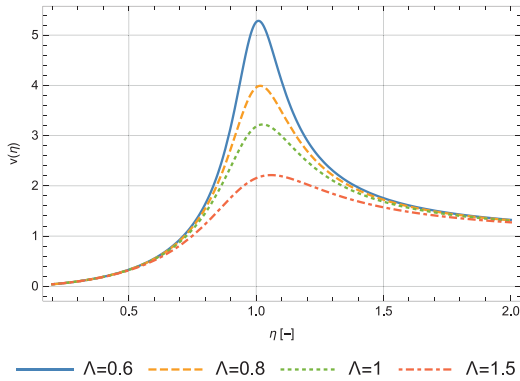


Bild 16. Vergrößerungsfunktion für ein fußpunkterregtes System

$$m \ddot{u}_r(t) + d \dot{u}_r(t) + k u_r(t) = w_0 \cdot m \cdot \Omega^2 \sin(\Omega \cdot t) \quad (16)$$

Damit folgt die Partikularlösung in analoger Weise zu $w_{r,p}(t) = A_r \cdot \sin(\Omega \cdot t - \alpha)$, wobei sich die Vergrößerungsfunktion und der Phasenversatz zu

$$V(\eta) = \frac{A_r}{w_0} = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + (2 \cdot D \cdot \eta)^2}}$$

$$= \tan \alpha = \frac{\Omega \cdot d}{k - \Omega^2 \cdot m} \quad (17)$$

ergeben.

Zum anderen kann auch mit den absoluten Schwingungskoodinaten, bezogen auf die statische Ruhelage des Massenpunkts, gearbeitet werden. Dann folgt eine zur Fußpunkterregung äquivalente Kraftanregung zu $p(t) = k \cdot u_F(t) + d \cdot \dot{u}_F(t)$, womit die Behandlung analog zu einem herkömmlichen krafterregten System erfolgen kann (Bilder 16 und 17).

2.2.3 Periodische Anregung

Jede beliebige periodische Anregungsfunktion kann, wie nachfolgend noch gezeigt wird, durch eine Summe einzelner harmonischer Funktionen $F(t) = F_1 \cdot \sin(\Omega_1 \cdot t) + F_2 \cdot \sin(\Omega_2 \cdot t) + \dots$ dargestellt werden. Lineare Systemeigenschaften vorausgesetzt, kann die daraus resultierende stationäre Schwingungsantwort durch eine Superposition der zugehörigen Einzellösungen $w_p(t) = C_1 \cdot \sin(\Omega_1 t - \alpha_1) + C_2 \cdot \sin(\Omega_2 t - \alpha_2) + \dots$ zusammengesetzt werden, wobei die jeweiligen Schwingungsamplituden sowie Phasenverschiebungen zu

$$C_i = \frac{F_i}{\sqrt{(k - m\omega_i^2)^2 + (d \cdot \omega_i)^2}}$$

$$\tan(\alpha_i) = \frac{d \Omega_i}{k - m \cdot \Omega_i^2} \quad (18)$$

ermittelt werden können.

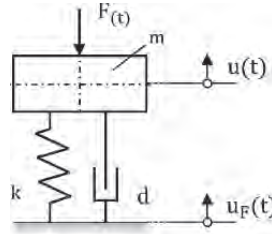


Bild 17. Mechanisches Modell eines fußpunkterregten Einfeldsystems

Die Zerlegung einer beliebigen periodischen Funktion mit einer endlichen Periodendauer T kann stets als sogenannte Fourier-Reihe dargestellt werden:

$$F(t) = F_0 + \sum_{r=1,2,3,\dots,N} F_r \cdot \sin(\Omega_r t) + \sum_{r=1,2,\dots,N} \bar{F}_r \cdot \cos(\Omega_r t) \quad (19)$$

$$\Omega_r = r\Omega_0$$

$$\Omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Die Koeffizienten der Fourier-Reihe folgen zu

$$F_r = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \sin(\Omega_r t) dt$$

$$\bar{F}_r = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cdot \cos(\Omega_r t) dt$$

$$F_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt$$

Im Falle einer mittelwertfreien Funktion verschwindet F_0 und je nach Symmetrie oder Antimetrie der Belastungsfunktion entfallen (sämtliche) Sinus- und Cosinus-Reihenglieder.

Wie aus den exemplarisch dargestellten Beispielen in Bild 18 zu erkennen, steigt die Genauigkeit der Approximation mit der Anzahl der Reihenglieder, wobei ein gewisses „Überschwingen“ im Bereich sprunghafter Belastungsfunktionen nicht vermeidbar ist.

Wie bereits dargelegt, lässt sich die Schwingungsantwort des betrachteten Einfeldsystems auf eine beliebige periodische Kraftanregung aus der Superposition der Einzelantworten auf die durch eine Fourier-Reihen-Zerlegung gewonnenen harmonischen Anregungsfunktionen gewinnen. Dazu sind in einem ersten Schritt die Vorfaktoren sowie die zugehörigen Phasenwinkel gemäß Gl. (18) zu bestimmen. Dabei ist der Definitionsbereich der Tangensfunktion $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ zu beachten und eine abschnittsweise Definition des Phasenwinkels α erforderlich:

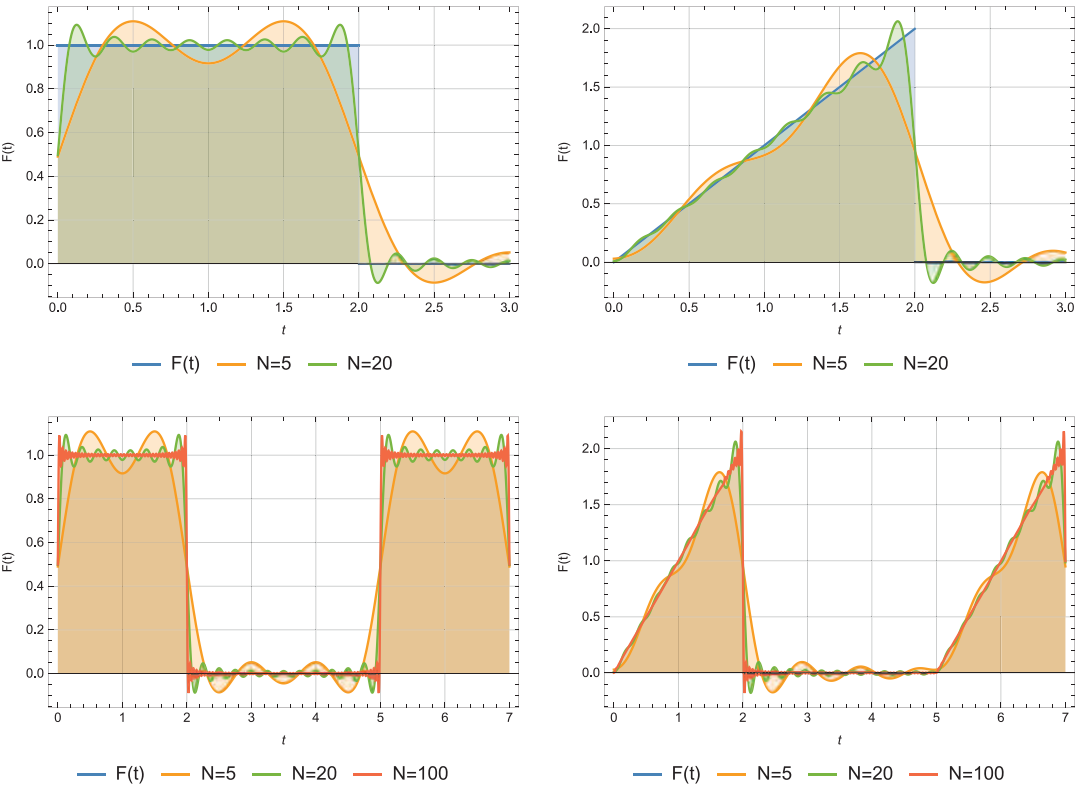


Bild 18. Rechteckige und sägezahnförmige periodische Belastungsfunktionen sowie deren Näherung auf der Basis einer Fourier-Reihe unter Zugrundelegung einer unterschiedlichen Anzahl an Reihengliedern

Tabelle 2. Ausgewählte periodische Belastungsfunktionen sowie zugehörige Fourier-Reihenglieder [2]

FOURIER-Cosinus-Reihen für unterschiedliche Impulsfunktionen		FOURIER-Sinus-Reihen für unterschiedliche Impulsfunktionen			
①		$x(t) = \frac{8p}{T} \left[\frac{c}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n t \sin \omega_n c \cos \omega_n t \right]$	⑧		$x(t) = \frac{8p}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n c \sin \omega_n t \cos \omega_n t$
②		$x(t) = \frac{8p}{Tc} \left[\frac{c^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \cos \omega_n t e \left(1 - \cos \omega_n c \right) \cos \omega_n t \right]$	⑨		$x(t) = \frac{8p}{Tc} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n c e \left(1 - \cos \omega_n c \right) \sin \omega_n t$
③		$x(t) = \frac{8p}{Tc} \left[\frac{c^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2} \cos \omega_n t e \left(1 - \cos \omega_n c \right) + \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n t e \sin \omega_n c \right\} \cos \omega_n t \right]$	⑩		$x(t) = \frac{8p}{Tc} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n c e \left(1 - \cos \omega_n c \right) + \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n c e \sin \omega_n t \right\} \sin \omega_n t$
④		$x(t) = \frac{4p}{Tc} \left[\frac{c^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n t e \sin \omega_n c + \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t e \sin \omega_n c \right\} \cos \omega_n t \right]$	⑪		$x(t) = \frac{4p}{Tc} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2} \cos \omega_n t e \sin \omega_n c - \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n t e \sin \omega_n c \right\} \sin \omega_n t$
⑤		$x(t) = \frac{4p}{Tc} \left[\frac{c^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2} \sin \omega_n t e \sin \omega_n c - \frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n t e \sin \omega_n c \right\} \cos \omega_n t \right]$	⑫		$x(t) = \frac{4p}{Tc} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\omega_n^2} \cos \omega_n t e \sin \omega_n c + \frac{1}{\omega_n} \cos \omega_n t e \sin \omega_n c \right\} \sin \omega_n t$
⑥		$x(t) = \frac{16p}{Tc^2} \left[\frac{c^3}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^3} \cos \omega_n t e \left(\frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n c - c \cos \omega_n c \right) \cos \omega_n t \right]$	⑬		$x(t) = \frac{16p}{Tc^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n^3} \sin \omega_n c e \left(\frac{1}{\omega_n} \sin \omega_n c - c \cos \omega_n c \right) \sin \omega_n t$
⑦		$x(t) = \frac{4p}{T} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos \omega_n t e \cos \omega_n t \right]$	⑭		$x(t) = \frac{4p}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \omega_n t e \sin \omega_n t$
Alle Reihen gehen von n = 1, 2, 3, ... bis n = ∞. T ist die Periode in s; c und e sind Zeitdauern in s. p bzw. P sind die Intensitäten der vorgegebenen Lastfunktion in N/s bzw. N. Die FOURIER-Koeffizienten a _n (der Cosinus-Reihen) und b _n (der Sinus-Reihen) lassen sich aus der jeweiligen Reihe unmittelbar ablesen.					

$$\alpha_i = \begin{cases} \arctan \left[\frac{d \cdot i \cdot \Omega_0}{k - m(i\Omega_0)^2} \right] & \text{für } i\Omega_0 < \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \frac{\pi}{2} & \text{für } i\Omega_0 > \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \arctan \left[\frac{d \cdot i \cdot \Omega_0}{k - m(i\Omega_0)^2} \right] + \pi & \text{für } i\Omega_0 > \sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases} \quad (20)$$

Ausgehend von den Gln. (18) und (19) kann schließlich die Schwingungsantwort zu

$$u(t) = \frac{F_0}{k} + \sum_{i=1}^N C_i \cdot \sin(i \cdot \Omega_0 \cdot t - \alpha_i) + \sum_{i=1}^N \bar{C}_i \cdot \cos(i \cdot \Omega_0 \cdot t - \alpha_i) \quad (21)$$

ermittelt werden.

In den Bildern 19 bis 24 sind die Schwingungsantworten eines Einmassenschwingers mit den Parametern $m = 100 \text{ kg}$, $k = 10000 \text{ N/m}$, $d = 300 \text{ Ns/m}$ dargestellt. Wird als Kraftanregung eine aus einzelnen Harmoni-

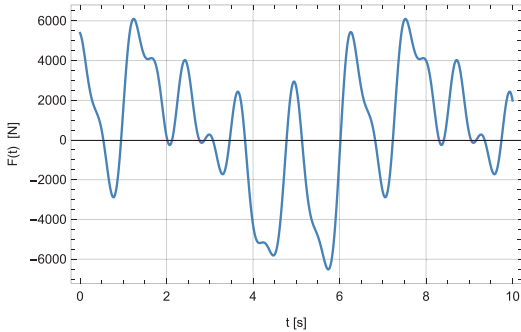


Bild 19. Zeitlicher Verlauf der Kraftanregung

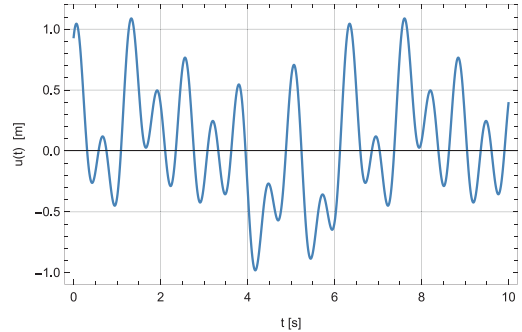


Bild 20. Zeitlicher Verlauf der Schwingungsreaktion

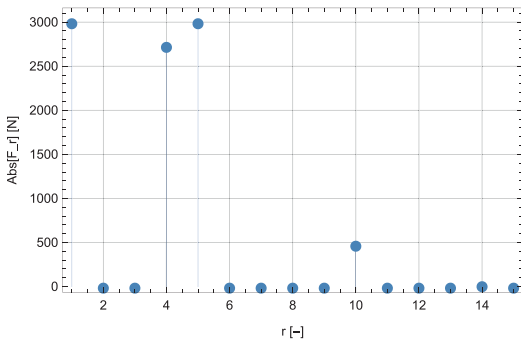


Bild 21. Diskretes Amplitudenspektrum der Kraftanregung (Fourier-Koeffizienten)

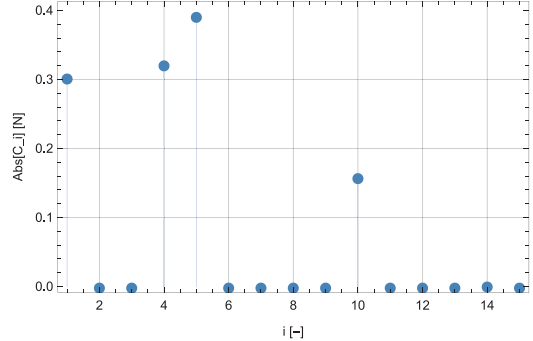


Bild 22. Diskretes Amplitudenspektrum der Schwingungsreaktion (Fourier-Koeffizienten)

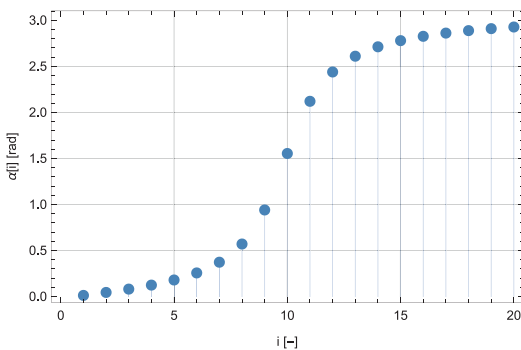


Bild 23. Phasenwinkel α zwischen der Kraftanregung und der Schwingungsantwort

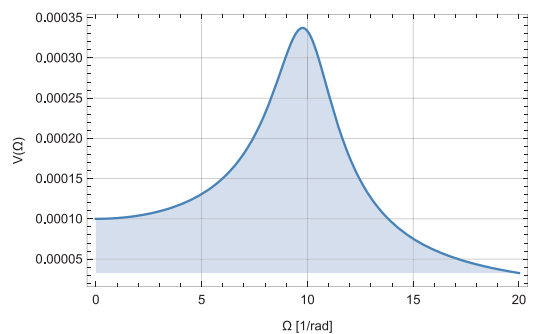


Bild 24. Vergrößerungsfunktion des zugrunde liegenden EFG-Systems

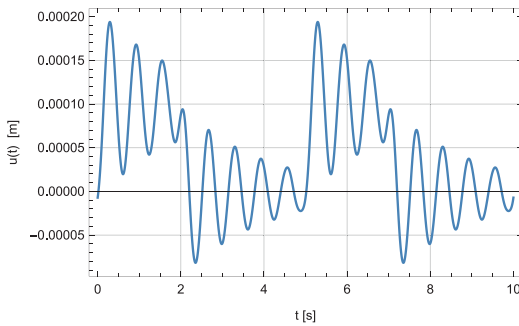


Bild 25. Schwingungsantwort für EFG-System mit $d = 100 \text{ Ns/m}$

schen zusammengesetzte Kraftanregung gemäß folgen- der Formulierung

$$F(t) = 3000 \sin(t) + 12 \sin(14t + \pi/6) + 3000 \cos(5t) \\ + 2000 \cos(\pi/6 - 4t) + 1300 \cos(\pi/6 - 10t)$$

betrachtet, so zeigt sich deren zeitlicher Verlauf sowie die daraus resultierende Schwingungsbeanspruchung wie dargestellt.

Dabei wurden neben den Zeitverläufen der Anregung und der Schwingungsantwort auch die jeweils zugehörigen Werte für die einzelnen Fourier-Koeffizienten der zugehörigen Reihen dargestellt. Man spricht hier auch von sog. diskreten Fourier-Spektren. Dabei wird deutlich, dass aufgrund des durch die Vergrößerungsfunktion definierten Übertragungsverhaltens die Anregungsfrequenzen in der Nähe der Eigenkreisfrequenz eine viel größere Verstärkung erfahren als jene weitab davon. Jedes Schwingungssystem kann somit als Filter betrachtet werden, bei dem die meiste Schwingungsenergie im Bereich der Eigenschwingfrequenzen übertragen wird. Des Weiteren wurden auch die jeweiligen Phasenwinkel α dargestellt. Entscheidend ist, dass neben der Information des Amplitudenspektrums stets auch die Information über den zugehörigen Phasenversatz notwendig ist, um die korrekte Schwingungsantwort zu ermitteln.

Als weiteres Beispiel werden Rechteckimpulse mit einer Impulsdauer von 2 Sekunden sowie einer Periodendauer von 5 Sekunden und einer Krafteinwirkung von jeweils 1000 N gewählt.

Während für das gering gedämpfte System ($d = 100 \text{ Ns/m}$) in Bild 25 eine deutliche Beeinflussung der einzelnen Impulse erkennbar wird, ist die Schwingungsantwort im Falle des stärker gedämpften Systems ($d = 500 \text{ Ns/m}$, Bild 26) beinahe vollständig abgeklungen, bevor der nächste Kraftimpuls beginnt.

Wird hier gedanklich die Periodendauer T gegen unendlich vergrößert, so können neben periodischen auch sogenannte transiente Belastungsfunktionen behandelt werden. Dabei wird aus den eben beschriebenen diskreten Fourier-Reihen im Grenzübergang das sogenannte Fourier-Integral und die diskreten Spektrallinien ver-

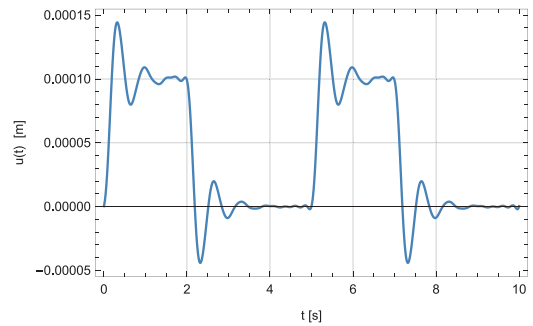


Bild 26. Schwingungsantwort für EFG-System mit $d = 500 \text{ Ns/m}$

ichten sich zu einem kontinuierlichen Frequenzspektrum (s. a. Abschnitt 2.2.4).

2.2.4 Transiente Anregung – Stoßbelastung

Transiente, d. h. stoßartige, Beanspruchungen haben eine große Bedeutung für vielerlei praktische Fragestellungen. Strebt bei einer Stoßbeanspruchung im Grenzübergang die Krafteinwirkung gegen unendlich und gleichzeitig die Einwirkungsdauer gegen null, so liegt ein massedominantes Schwingungssystem vor und Feder- und Dämpferkräfte sind ohne Belang. Die Geschwindigkeit der dann als frei zu betrachtenden Masse kann unmittelbar über den Impulssatz zu $v = I_0/m$ bestimmt werden. Aus der homogenen Lösung der Schwingungsdifferenzialgleichung (5) folgt dann für $u_0 = 0$ und $v_0 = I_0/m$

$$u(t) = \frac{I_0}{m\omega_D} e^{-\delta t} \sin(\omega_D t) \quad (22)$$

was für den Fall $I_0 = 1$ auch als Impulsreaktionsfunktion $h(t)$ bezeichnet wird (s. Bild 27).

Analog zur Vorgehensweise für periodische Anregungen, kann auch die Antwort auf transiente Beanspruchungen – wiederum lineare Systemeigenschaften vorausgesetzt – durch eine Superposition der Antworten auf eine unendliche Reihe von Einzelimpulsen zusammengesetzt werden. Durch den Grenzübergang dt gegen null wird aus der Summe der Fourier-Reihe nunmehr ein Integral, das sog. Duhamel-Integral:

$$u(t) = \int_0^t F(\tau) \cdot h(t - \tau) d\tau \quad (23)$$

In Bild 28 ist die Schwingungsantwort auf die Kraftanregung gemäß Bild 19 einmal unter Zugrundelegung der diskreten Fourier-Reihe sowie einmal unter Anwendung des Duhamel-Integrals dargestellt. Anhand dieser Gegenüberstellung wird ein fundamentaler Unterschied zwischen den beiden Lösungen und Vorgehensweisen deutlich. Da die Fourier-Reihe ausschließlich für periodische Prozesse definiert ist, kann damit lediglich der stationäre, d. h. eingeschwungene Zustand abgebildet werden. Oder mit anderen Worten, es wird stillschwei-

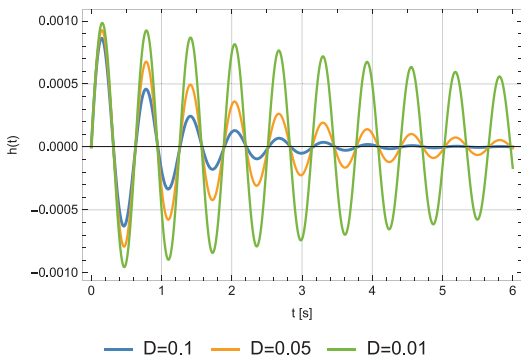


Bild 27. Exemplarische Impulsreaktionsfunktionen für unterschiedliche Dämpfungsparameter

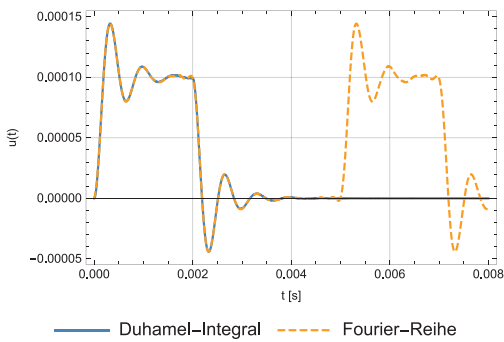


Bild 29. Schwingungsreaktion eines EFG-Systems auf eine stoßartige Beanspruchung

gend unterstellt, dass die Belastung bei $t = -\infty$ begonnen hat und bis $+\infty$ andauert.

Für das Duhamel-Integral, das ja gerade eingeführt wurde, um die Schwingungsantwort auf transiente Beanspruchungen zu bestimmen, ist diese Einschränkung nicht erforderlich und es wird die exakte Lösung unter Berücksichtigung der Anfangsbedingungen $u_0 = 0$ und $\dot{v}_0 = 0$ ermittelt. Nach dem Abklingen der homogenen

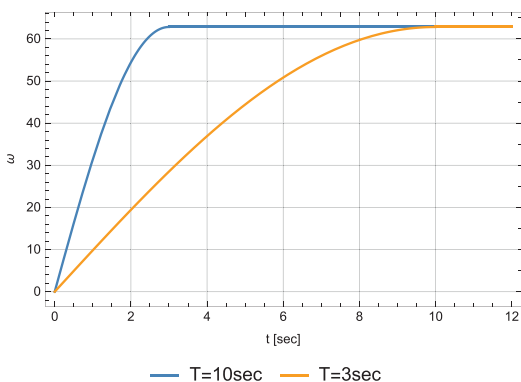


Bild 30. Zeitlicher Verlauf der Rotationsfrequenz $\omega = 2\pi \frac{U}{\min} \frac{1}{60}$

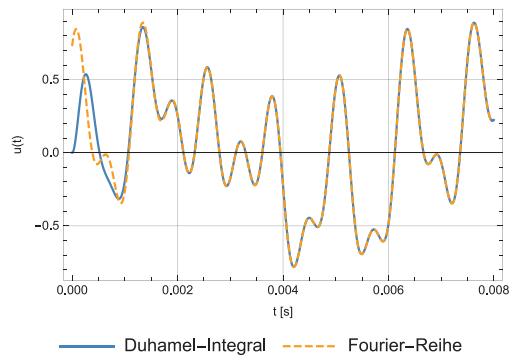


Bild 28. Schwingungsantwort eines EFG-Systems auf eine periodische Anregung

Lösung stimmen die hier gefundenen Lösungen exakt überein. Exakt deshalb, weil es sich um eine periodische Funktion handelt und diese – eine ausreichende Anzahl von Fourier-Reihengliedern vorausgesetzt – exakt durch die diskrete Fourier-Reihe wiedergegeben wird. Betrachtet man hingegen die Rechteckstoßbelastung die auch Bild 25 und Bild 26 zugrunde gelegt wurde, so stellt der Reihenansatz nur noch eine Näherung im Vergleich zur exakten Lösung des Duhamel-Integrals dar (vgl. Bild 29).

Fortsetzung zu Beispiel 2

Nummehr sind sämtliche erforderliche Grundlagen bekannt, um den Einschwingvorgang der unter Beispiel 2 betrachteten Konfiguration (hier System mit der Rahmenaussteifung) zu ermitteln. Dazu wird im ersten Schritt der zeitliche Verlauf der unwuchtbedingten Horizontalkraft ermittelt. Wird die Steigerung der Umdrehungsgeschwindigkeit von null auf den Maximalwert von 600 U/min in 5 bzw. 10 Sekunden mit der Funktion einer Sinus-Viertelwelle abgebildet, so zeigt die Horizontalkraft den in den Bildern 30 und 31 dargestellten Verlauf.

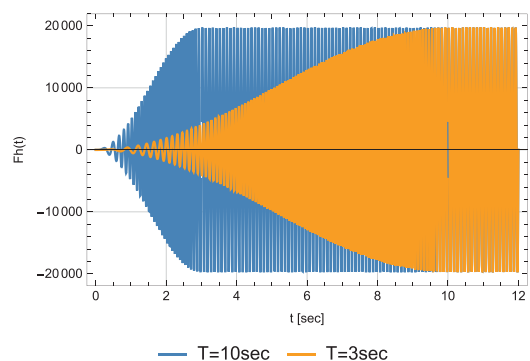


Bild 31. Verlauf der unwuchtbedingten Horizontalkraft

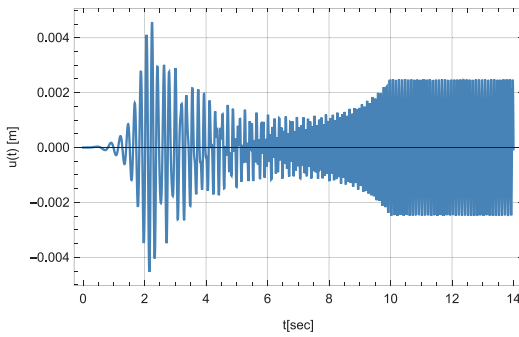


Bild 32. Horizontalschwingungsamplituden für eine Anfahr-
dauer von $T = 10$ Sekunden

Wie aus der Gegenüberstellung der Horizontalschwingungsamplituden in Bild 32 und Bild 33 deutlich zu erkennen, wird bei der vorliegenden, tief abgestimmten Konstruktion der Resonanzbereich beim Anfahren durchlaufen. Wie weiter oben bereits erläutert, ist für die Resonanzanfachung einer Schwingbewegung in Abhängigkeit der Systemdämpfung eine gewisse Anzahl an Schwingungszyklen erforderlich. Das Maß der maximalen Amplitude während des Anfahrens hängt entscheidend davon ab, wie schnell die kritischen Frequenzbereiche durchfahren werden können.

Das Faltungsintegral in Gl. (23) kann auch dazu verwendet werden, um die Schwingungsantwort von Einfreiheitsgradsystemen auf unterschiedliche Stoßbelastungen zu ermitteln. Werden dabei lediglich die i. d. R. primär interessierenden Maximalschwingungsamplituden betrachtet, so führt dies auf die sogenannten Antwort- oder Shock-Response-Spektren. Dabei wird das Verhältnis der Maximalamplitude infolge der dynamischen Überhöhung zur statischen Auslenkung infolge derselben Maximalkraft gegenübergestellt. Beim Vergleich der unterschiedlichen Kraftverläufe ist darüber hinaus zu beachten, dass deren unterschiedliche Völligkeit auch zu unterschiedlichen Impulsgrößen führt.

Der obere Grenzwert für die Shock-Response-Spektren liegt beim Faktor zwei, welcher beim Vorliegen einer idealen Sprungfunktion erreicht wird (Bild 34). Neben den eben aufgeführten Betrachtungen im Zeitbereich kann die Lösung linearer Einfreiheitsgradsysteme auch im Frequenzbereich gewonnen werden. Dazu wird im Vorgriff auf Abschnitt 2.2.5 sowie unter Verzicht auf jegliche Herleitung (hierfür wird auf die einschlägige Fachliteratur [1, 4, 5] verwiesen) die Fourier-Transformation (die absolute Integrierbarkeit der betrachteten Funktionen wird stillschweigend vorausgesetzt) eingeführt. Demnach ist die Fourier-Transformierte der Funktion $u(t)$ definiert als

$$F\{u(t)\} = U(j\omega) := \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \quad (24)$$

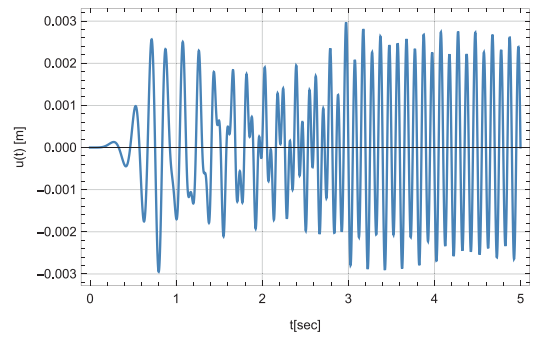


Bild 33. Horizontalschwingungsamplitude für eine Anfahr-
dauer von $T = 5$ Sekunden

wobei Fourier-transformierte Größen stets mit Großbuchstaben bezeichnet werden. Die inverse Fourier- oder Fourier-Rücktransformation folgt dann zu:

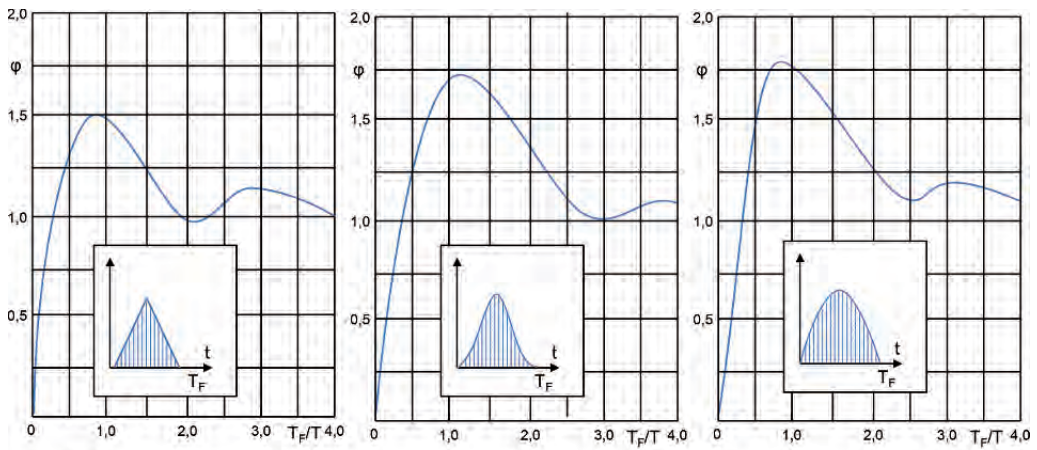
$$F^{-1}\{U(j\omega)\} = u(t) := \beta \int_{-\infty}^{+\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (25)$$

Für die Vorfaktoren α und β , welche im Rahmen dieses Beitrags stets zu $\alpha = 1$ und $\beta = 1/2\pi$ gewählt werden, existieren in der Literatur sowie diversen Mathematikverarbeitungssoftwarepaketen durchaus abweichende Definitionen, wobei unabhängig von der gewählten Normierung stets $\alpha\beta = 1/2\pi$ gelten muss.

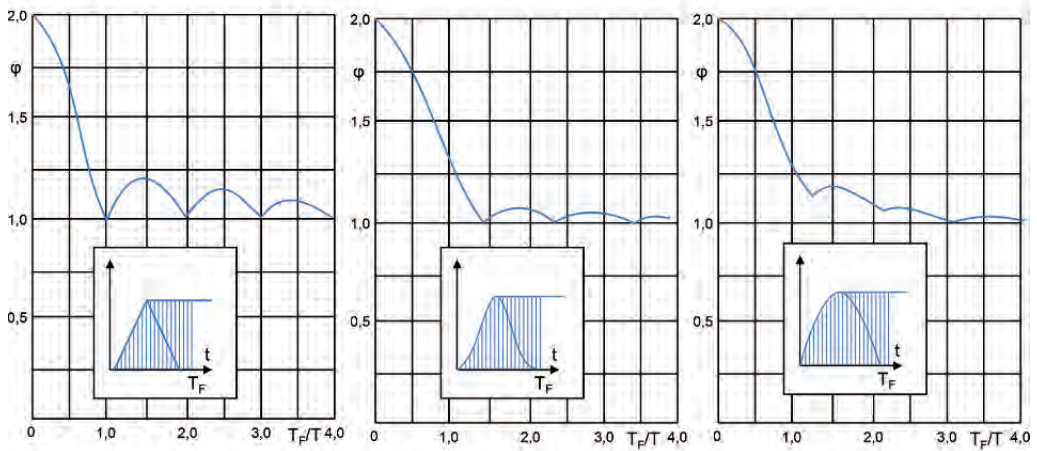
In den Bildern 35 und 36 sind exemplarisch die Real- und Imaginärteile sowie die zugehörigen Betragsfunktionen, i. d. R. auch als Amplitudenspektrum bezeichnet, dargestellt. Dabei wird für die beiden Rechteckfunktionen mit identischer Amplitude und Zeitdauer, jedoch unterschiedlichem Nullpunkt deutlich, dass diese zwar ein identisches Amplitudenspektrum aufweisen, jedoch voneinander abweichende Real- und Imaginärteile besitzen. Um die vollständige Information aus der Originalfunktion auch nach der Fourier-Transformation im sogenannten Bild- oder Frequenzraum zu erhalten, sind somit stets Real- und Imaginärteil zu betrachten, da nur so die Information über ggf. abweichende Phasenlagen erhalten bleiben. Diese gehen analog zur Fourier-Reihe bei alleiniger Betrachtung des Amplitudenspektrums unwiederbringlich verloren.

Auffällig ist auch eine Besonderheit der Fourier-Transformation, wonach eine gerade reelle Funktion eine rein reelle Fourier-Transformierte besitzt. Für grundlegende Untersuchungen können die vielfach in der Literatur angegebenen analytischen Zusammenhänge zwischen Originalfunktion und Fourier-Transformierter hilfreich sein (s. beispielsweise [5]).

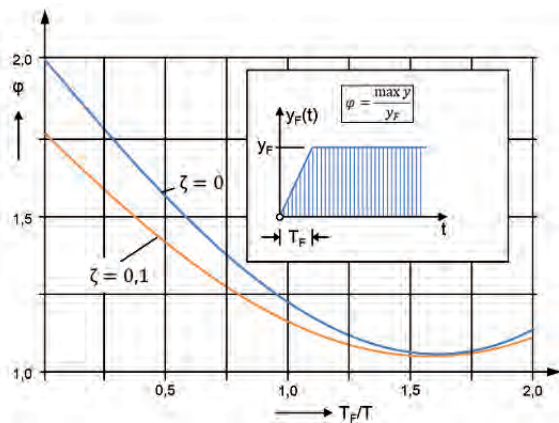
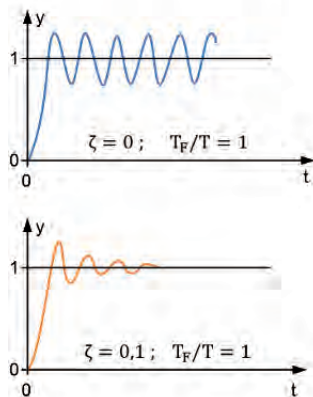
Interessant ist die Transformation in den Frequenzbereich auch deswegen, weil sich dadurch die aufwendigen Faltungsintegrale in Gl. (23) durch eine einfache Multiplikation ersetzen lassen. Wird die Impulsreaktionsfunktion $h(t)$ einer Fourier-Transformation unterzogen, so folgt daraus die sogenannte Frequenzgangfunktion



Shock-Response Spektren für Impulse



Shock-Response Spektren für Lastaufbringungen

Bild 34. Shock-Response-Spektren für ausgewählte Belastungsfunktionen und unterschiedliche Lehr'sche Dämpfungsgrade ζ ($= D$) [2]

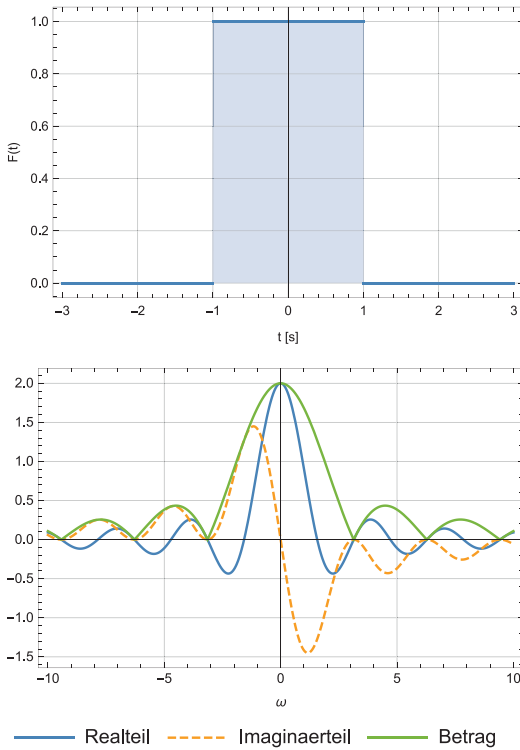


Bild 35. Rechteckimpuls $T = 2$ sec. $T_0 = 0$ und zugehörige Fourier-Transformierte

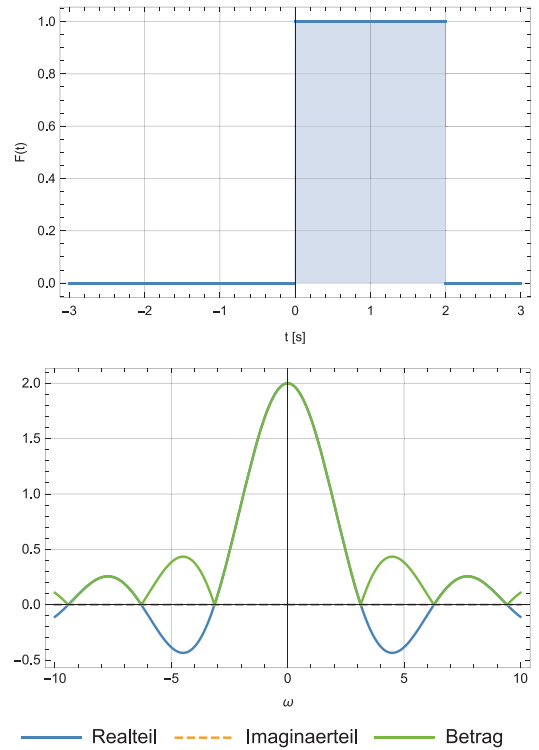


Bild 36. Rechteckimpuls $T = 2$ sec. $T_0 = -1$ und zugehörige Fourier-Transformierte

$$H(j\omega) = \frac{1}{-\omega^2 m + j\omega d + k} \quad (26)$$

welche mit der bereits diskutierten Vergrößerungsfunktion wie folgt zusammenhängt.

$$\frac{V(\omega)}{k} = |H(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(H(j\omega)))^2 + (\operatorname{Im}(H(j\omega)))^2}$$

$$\tan \alpha = \frac{\operatorname{Im}(H(j\omega))}{\operatorname{Re}(H(j\omega))} \quad (27)$$

Bei der Durchführung der Fourier-Transformation ist wiederum der Definitionsbereich der Impulsreaktionsfunktion lediglich für Werte $t > 0$ zu beachten, was praktisch z. B. durch die Multiplikation mit einer Heaviside-Funktion mit der Sprungstelle $t = 0$ erzielt werden kann und somit wiederum herkömmliche ProgrammROUTINEN für die Transformation anwendbar werden.

Aus dem Faltungsintegral in Gl. (23) kann nunmehr im Fourier-Raum die vollständige Schwingungsantwort durch eine simple Multiplikation der Frequenzgangfunktion $H(j\omega)$ mit der Fourier-Transformierten Belastungsfunktion $P(j\omega)$ ermittelt werden

$$U(j\omega) = H(j\omega)P(j\omega) \quad (28)$$

Daraus kann schließlich über eine inverse Fourier-Transformation wiederum die Schwingungsantwort im Zeitbereich gefunden und auf diese Weise die äu-

ßerst rechenzeitintensive Faltung umgangen werden (Bild 37).

Auch ohne Rücktransformation können bereits allein unter Berücksichtigung der Amplitudenspektren der Anregung sowie der Frequenzgangfunktion qualitative Aussagen über dominierende Frequenzbereiche der Schwingungsantwort getroffen werden.

Sogenannte Kurzzeit-Spektren, d. h. diskrete Frequenzspektren mit einer bestimmten Fensterlänge (s. hierzu auch Abschnitt 4), die deutlich kleiner als die gesamte Messschrieblänge sind, können zur Beurteilung wechselnder Schwingungszustände über den Messzeitraum herangezogen werden. So wird beispielsweise in Bild 38 und Bild 39 deutlich, dass sich die an der Gesamtschwingungsantwort beteiligten Schwingfrequenzen und da es sich um einen Ausschwingvorgang handelt, gleichzeitig auch die beteiligten Eigenfrequenzen stark mit fortdauernder Schwingzeit unterscheiden.

Auch können derartige Kurzzeit-Spektren zur anschaulichen Auswertung längerer Messschriebe herangezogen werden. Werden beispielsweise die globalen Schwingungsbeanspruchungen eines zweiachsigen Fahrzeugs infolge einer beschleunigten Fahrt betrachtet, so können die dominanten Schwingfrequenzen infolge von fahrbahnunebenheitsinduzierten Schwingbewegungen sehr anschaulich dargestellt werden. Ausgewertet wurden hier die vertikalen Beschleunigungssignale

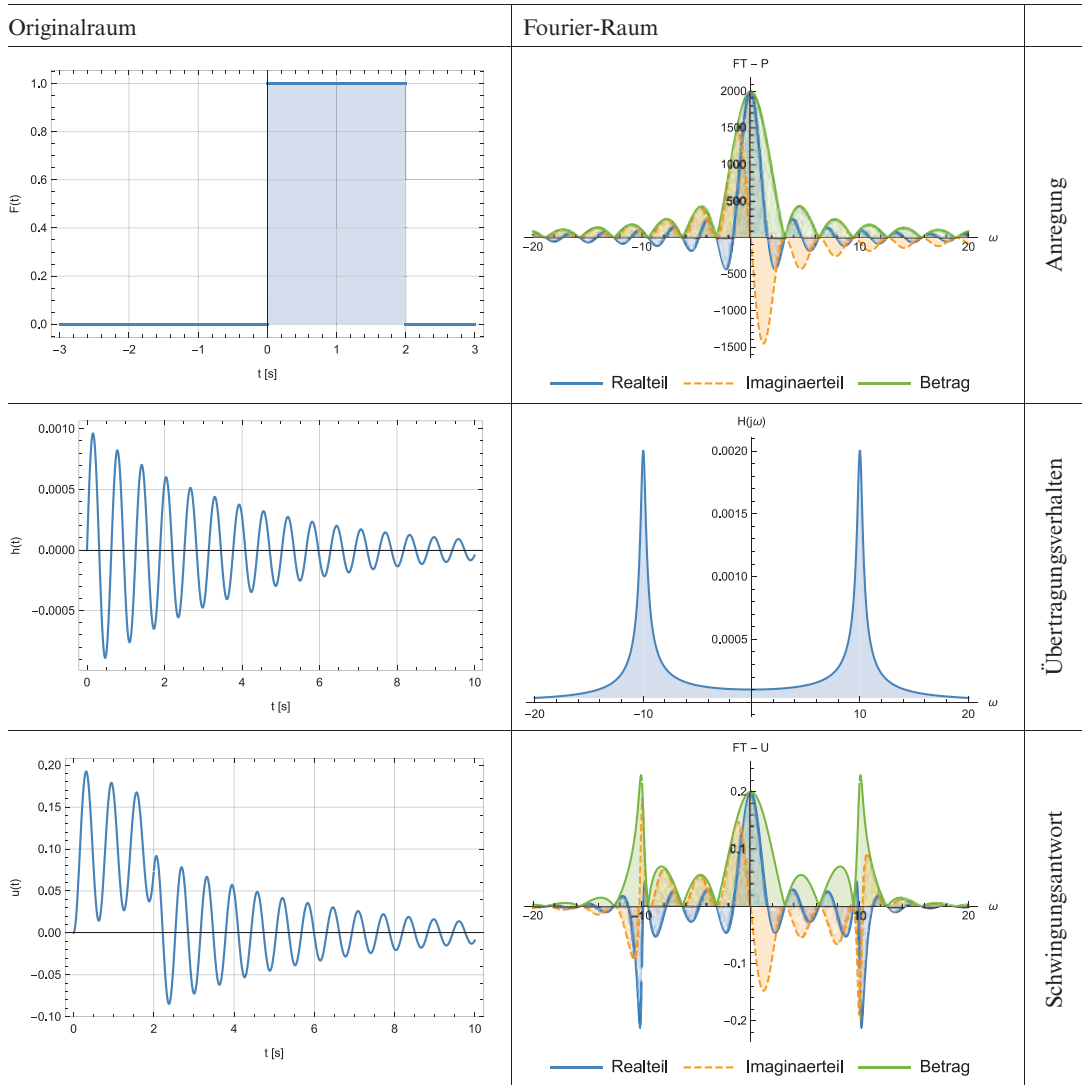


Bild 37. Schematische Darstellung des Übertragungsverhaltens eines Einfreiheitsgradsystems im Original- und Frequenzraum

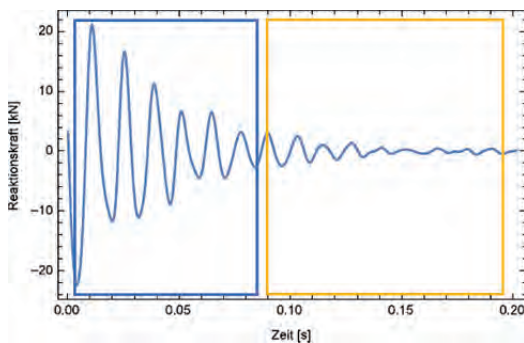


Bild 38. Ausschwingkurve einer Fahrbahnübergangs-konstruktion nach einer Fahrzeugüberfahrt [9]

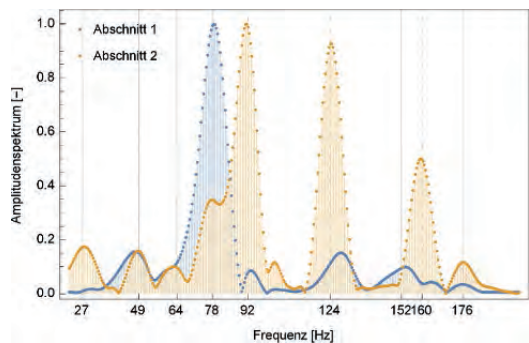


Bild 39. Aus Bild 38 ermittelte Kurzeitspektren

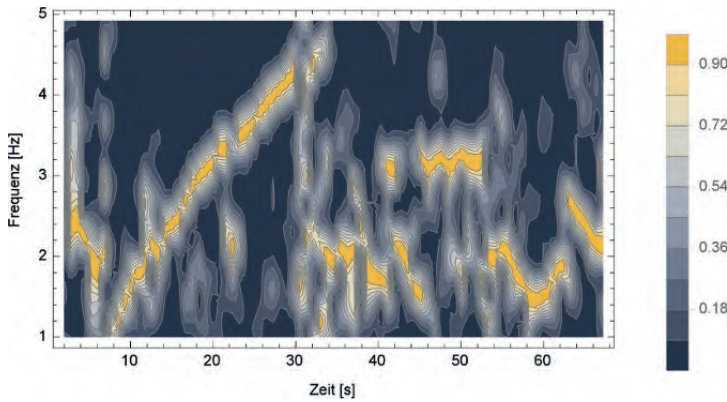


Bild 40. Kurzzeit-Spektren eines Beschleunigungssignals eines Fahrzeugs

der Hinterachse im Bereich des rechten Reifens (Bild 40).

2.2.5 Regellose Systemanregung

Bislang wurde stillschweigend davon ausgegangen, dass sowohl die Systemeigenschaften als auch die Einwirkungen durch determinierte Ansätze und Modelle in ausreichender Näherung beschreibbar sind. Für eine ganze Reihe von technisch interessierenden Fragestellungen, wie beispielsweise windinduzierte Schwingungsbeanspruchungen turmartiger Konstruktionen oder Fahrzeugschwingungen infolge von Fahrbahnunebenheiten trifft diese Voraussetzung zumindest für die Einwirkungsseite nicht mehr zu und es wird i. d. R. auf die Theorie der stochastischen Dynamik zurückgegriffen. Die Einwirkungen, d. h. die Windgeschwindigkeiten in einer bestimmten Höhe oder die Fahrbahnunebenheiten einer Fahrspur, können dann als Realisierung eines skalaren Zufallsprozesses idealisiert werden. Unter einem skalaren Zufallsprozess $z(e; t)$ wird eine skalare Zufallsgröße (Windgeschwindigkeit oder Unebenheitsamplitude) als Funktion einer einzigen Veränderlichen (Zeit oder Weg) verstanden.

Die skalare Zufallsgröße oder sogenannte Zufallsvariable $z(e)$ stellt als Abbildung der Ergebnismenge E eines Zufallsexperiments auf die Menge der reellen Zahlen die elementare Grundlage der Wahrscheinlichkeitstheorie dar. Der zugrunde liegende Gedanke dabei ist, dass zwar die einzelnen Ergebnisse $z(e = e_i)$ eines Zufallsexperiments, sogenannte Realisierungen, zufällig und somit nicht vorhersehbar sind, deren Gesamtheit jedoch gewissen Gesetzmäßigkeiten unterliegt. Zufallsvariablen können im stochastischen Sinne eindeutig durch die ihnen zugeordnete Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktion oder im Falle deren Stetigkeit und Differenzierbarkeit auch durch die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion beschrieben werden.

$$F_z(u) = W\{z(e) \leq u\}$$

$$f_z(u) = \frac{dF_z(u)}{du} \quad (29)$$

Eine herausragende Stellung nimmt dabei die sog. Gauß- oder Normalverteilungsdichtefunktion

$$f_z(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_z} e^{-\frac{(u-\mu_z)^2}{2\sigma_z^2}} \quad (30)$$

welche in erschöpfender Weise durch den Mittelwert μ_z sowie die Standardabweichung σ_z beschrieben wird, ein. Für eine beliebig festgehaltene (Zeit-)Koordinate $t = t_i$ entspricht der Zufallsprozess $z(e; t = t_i) = z(e)$ erneut einer Zufallsvariablen, wobei im Falle einer festen Variable $e = e_j$ von einer Realisierung oder Musterfunktion $z(e = e_j; t) = z(t)$ des zugrunde liegenden stochastischen Prozesses gesprochen wird. Die zur Beschreibung derartiger Prozesse herangezogenen Kenngrößen wie Mittelwerts- oder Korrelationsfunktionen sind grundsätzlich aus einer sog. Ensemblemittelung zu generieren. Wird im Folgenden stets Stationarität sowie Ergodizität (s. hierfür beispielsweise [1]) der betrachteten Prozesse vorausgesetzt, so können diese auch aus einzelnen Realisierungen ermittelt werden und sind dann per Definition für die Grundgesamtheit, d. h. den zugrunde liegenden Zufallsprozess, gültig. An dieser Stelle sei nur angemerkt, dass sowohl die Stationarität sowie auch die Ergodizität eines stochastischen Prozesses nicht aus Messdaten abgeleitet werden können. Diese dem betrachteten stochastischen Prozess zugeschriebenen systemimmanenten Eigenschaften müssen vielmehr a priori aufgrund von dessen physikalischen Eigenschaften postuliert werden. Somit können Mittelwert und die sogenannten Korrelationsfunktionen per Definition wie folgt ermittelt werden:

$$m_x = \overline{x(e; t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (31)$$

Durch die Definition als Produktmittelwert zeitlich verschobener Musterfunktionen eines Zufallsprozesses gibt die Autokorrelationsfunktion (Gl. 32) Aufschluss über die inneren Zusammenhänge bzw. die zeitliche Entwicklung eines stochastischen Prozesses (Bild 41). Sie ist eine gerade Funktion symmetrisch in τ und entspricht für $\tau = 0$ dem quadratischen Mittelwert bzw. für zentrierte, d. h. mittelwertbefreite Prozesse der Varianz σ^2 .

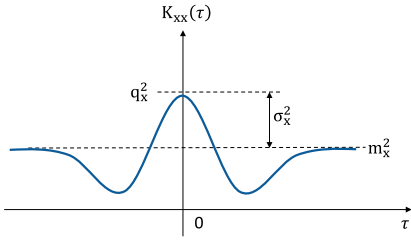


Bild 41. Autokorrelationsfunktion

$$K_{xx}(\tau) = \overline{x(e;t)x(e;t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (32)$$

$$K_{xy}(\tau) = \overline{x(e;t)y(e;t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t)y(t+\tau) dt \quad (33)$$

Die Kreuzkorrelationsfunktion (Gl. (33)) ist weder gerade noch ungerade und gibt Aufschluss über die Zusammenhänge zweier unterschiedlicher zeitlich verschobener Prozesse und enthält im Gegensatz zur Autokorrelationsfunktion zusätzlich noch eine Phaseninformation. Die Kreuzkorrelationsfunktion stellt somit ein hervorragendes Instrument dar, um beispielsweise die relative Phase zweier periodischer Signale zueinander zu bestimmen. Wie aus Bild 42 zu erkennen, weist sie ihr Maximum stets für $\tau > 0$ auf. Für $\tau = 0$ folgt für zentrierte Prozesse die sogenannte Kovarianz σ_{xy}^2 . Als Beispiel werden an dieser Stelle die Auto- sowie die Kreuzkorrelationsfunktionen von Beschleunigungssignalen eines instrumentierten Fahrzeugs präsentiert.

Aus einer Gegenüberstellung der ungefilterten sowie der gefilterten Signale in Bild 43 und Bild 44 wird deutlich, dass dem eigentlich interessierenden Signal der globalen Hub- und Nickbewegungen des Fahrzeugs hochfrequente Signalanteile überlagert sind. Selbige Information verdeutlicht auch die zugehörige Autokorrelationsfunktion in Bild 45. Die harmonisch geprägte Beschaffenheit der Autokorrelationsfunktion für $\tau > 0,15$ Sekunden verdeutlicht die dominanten harmonischen Anteile der Vertikalschwingungsbewegung. Das

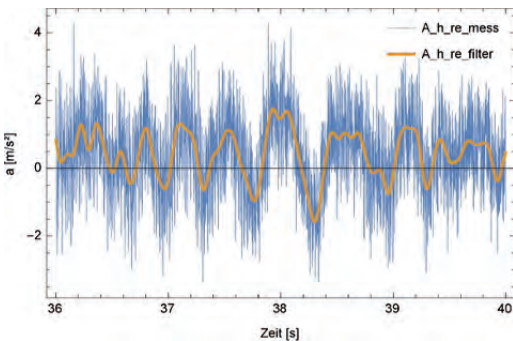


Bild 43. Vertikalbeschleunigung der hinteren Fahrzeugachse (Rohdaten und gefilterte Messwerte)

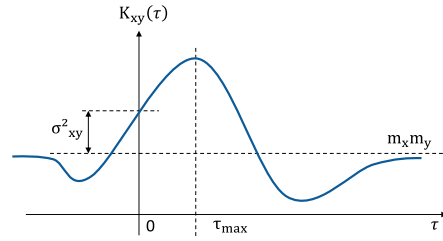


Bild 42. Kreuzkorrelationsfunktion

deutliche Maximum für $\tau = 0$ charakterisiert die den globalen Schwingbewegungen überlagerten unkorrelierten Signalanteile. Das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion zwischen den Vertikalbeschleunigungssignalen des Fahrzeugaufbaus im Bereich der Vorder- und Hinterachse bei $\tau = 0,21$ Sekunden verdeutlicht die dominanten Nickbewegungen des Fahrzeugaufbaus sowie den zugehörige Phasenversatz zwischen den maximalen Schwingungsamplituden (Bild 46).

Interessant für mancherlei Fragestellung ist auch die Autokorrelationsfunktion zusammengesetzter Prozesse $z(e;t) = a_x(e;t) + b_y(e;t)$, welche zu

$$K_{zz}(\tau) = a^2 K_{xx}(\tau) + ab[K_{xy}(\tau) + K_{yx}(\tau)] + b^2 K_{yy}(\tau) \quad (34)$$

folgt und nur im Falle stochastisch unabhängiger Prozesse, d. h. $K_{xy}(\tau) = K_{yx}(\tau) = 0$ zu $K_{zz}(\tau) = a^2 K_{xx}(\tau) + b^2 K_{yy}(\tau)$ ermittelt werden kann.

Analog zu den eben diskutierten Korrelationsfunktionen, welche die inneren Zusammenhänge stochastischer Prozesse im Originalraum (z. B. Zeit oder Ort) beschreiben, können dazu äquivalente Beschreibungen auch im Fourier-transformierten Bildraum (Frequenz oder Wellenzahl) gefunden werden. Die dann als spektrale (Leistungs-)Dichtefunktionen $S(\omega)$ bezeichneten Funktionen sind gemäß der sogenannten Wiener-Khintschin-Relation [1] zu

$$S_{xx}(\omega) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} N_{xx}(\tau) d\tau$$

$$S_{xy}(\omega) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau} N_{xy}(\tau) d\tau \quad (35)$$

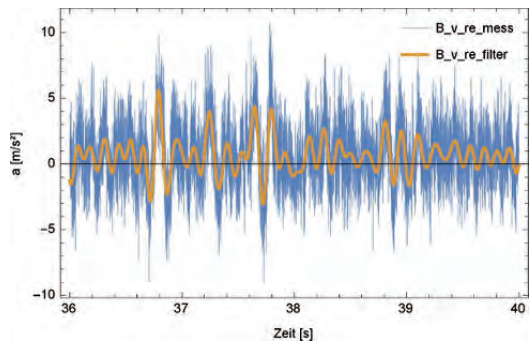


Bild 44. Vertikalbeschleunigung Fahrzeugaufbau (Rohdaten und gefilterte Messwerte)

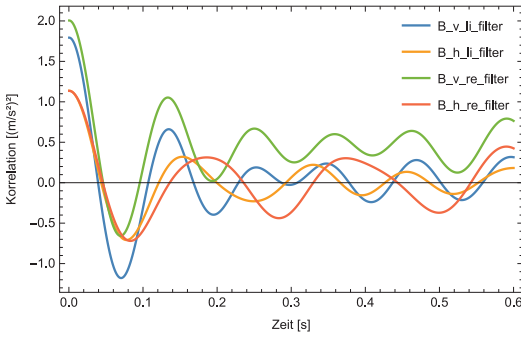


Bild 45. Autokorrelationsfunktion der vertikalen Aufbau-beschleunigungen

$$N_{xx}(\tau) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_{xx}(\omega) d\omega$$

$$N_{xy}(\tau) = \beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\tau} S_{xy}(\omega) d\omega \quad (36)$$

definiert, wobei mit $N_{xx}(\tau)$ die zentrierte Auto- und mit $N_{xy}(\tau)$ die zentrierte Kreuzkorrelationsfunktion gemeint sind und deren Vorfaktoren analog zum Abschnitt 2.2.4 zu $\alpha = 1$ und $\beta = 1/2\pi$ vereinbart werden. Während die Korrelationsfunktionen stets die Dimension eines Amplitudenquadrats besitzen, weisen deren Fourier-Transformierte die spektralen (Leistungs-) Dichtefunktionen die Dimension Amplitudenquadrat mal Parametereinheit auf. So beispielsweise im Falle eines Windgeschwindigkeitsverlaufs [$m^2/s^2 = m^2/s$] sowie im Falle örtlich betrachteter Fahrbahnunebenheiten [$m^2m = m^3$].

Wird die inverse Fourier-Transformation für einen verschwindenden Zeitversatz $\tau = 0$ ausgewertet, so folgt daraus per Definition die Varianz des zugrunde liegenden stochastischen Prozesses

$$N_{xx}(0) = \sigma_{xx}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(\omega) d\omega \quad (37)$$

was bedeutet, dass die Varianz eines stochastischen Prozesses auch durch eine Integration über die spektrale Dichtefunktion im Frequenzbereich ermittelt werden kann.

Darüber hinaus bedeutsam sind neben den Varianzen der Schwingungsamplituden auch die Varianzen der zugehörigen Schwinggeschwindigkeiten und -beschleunigungen, die zu

$$\begin{aligned} \sigma_{\dot{x}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega \\ \sigma_{\ddot{x}}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 S_{xx}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (38)$$

ermittelt werden können [2].

Zu beachten gilt es auch, dass in der Literatur häufig anstelle der im allgemeinen zweiseitigen Autoleistungsdichtefunktionen $S_{xx}(\omega)$ mit $-\infty < \omega < +\infty$ unter Ausnutzung deren Symmetrieeigenschaften die korrespon-

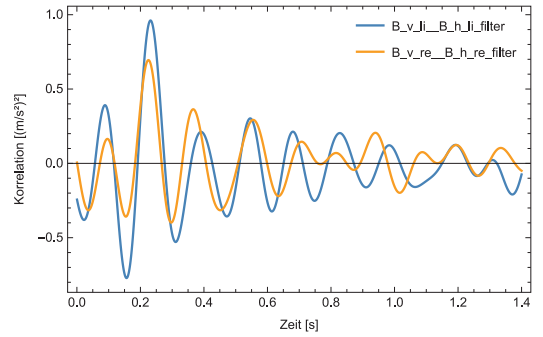


Bild 46. Kreuzkorrelationsfunktion der Aufbaubeschleunigungen im Bereich der Vorder- und Hinterachse

dierende einseitige Dichtefunktion mit $0 < \omega < +\infty$ zu $G_{xx}(\omega) = 2 S_{xx}(\omega)$ gebräuchlich ist. Diese findet übrigens auch im Rahmen der DIN EN 1991-4 zur Beschreibung der Windgeschwindigkeit Anwendung (s. a. Abschnitt 5.3.1).

Die für die Korrelationsfunktion aufgezeigten Gesetzmäßigkeiten für zusammengesetzte Prozesse gelten in analoger Weise auch für spektrale Dichtefunktionen [1].

Als in der Praxis wichtiges Instrument für die Beschreibung der stochastischen Abhängigkeit zweier Zufallsprozesse im Frequenzbereich wird häufig die sogenannte dimensionslose Kohärenzfunktion

$$\gamma_{xy}(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|}{\sqrt{S_{xx}(\omega) S_{yy}(\omega)}} \quad (39)$$

herangezogen, welche Werte zwischen null und eins annehmen kann. Daraus wird auch deutlich, dass aufgrund der Betragsbildung in Gl. (39) aus Kohärenzfunktionen sowie aus Autoleistungsfunktionen im Allgemeinen nicht auf die zugehörige Kreuzleistungsdichte geschlossen werden kann, weil dadurch jegliche Phaseninformation verloren geht.

In Bild 47 sind ausgewählte Signale, deren Wahrscheinlichkeitsdichte- und Wahrscheinlichkeitsverteilungsfunktionen sowie die zugehörigen Autokorrelations- und Leistungsdichtefunktionen dargestellt, um ein Gespür für die allgemeinen Erscheinungsformen der jeweiligen Größen zu vermitteln.

Nach dieser sehr oberflächlich gehaltenen und auf die wesentlichen Zusammenhänge beschränkten Einführung in die Theorie stochastischer Prozesse kann nunmehr auf das Übertragungsverhalten linearer Schwingungssysteme im Frequenzbereich eingegangen werden. Demnach kann die spektrale Dichtefunktion der Systemantwort $S_{uu}(\omega)$ aus einer simplen Multiplikation der spektralen Dichtefunktion der Anregung $S_{pp}(\omega)$ mit dem Betragsquadrat der Frequenzgangfunktion gefunden werden (vgl. auch [1]).

$$S_{uu}(\omega) = |H(j\omega)|^2 S_{pp}(\omega) \quad (40)$$

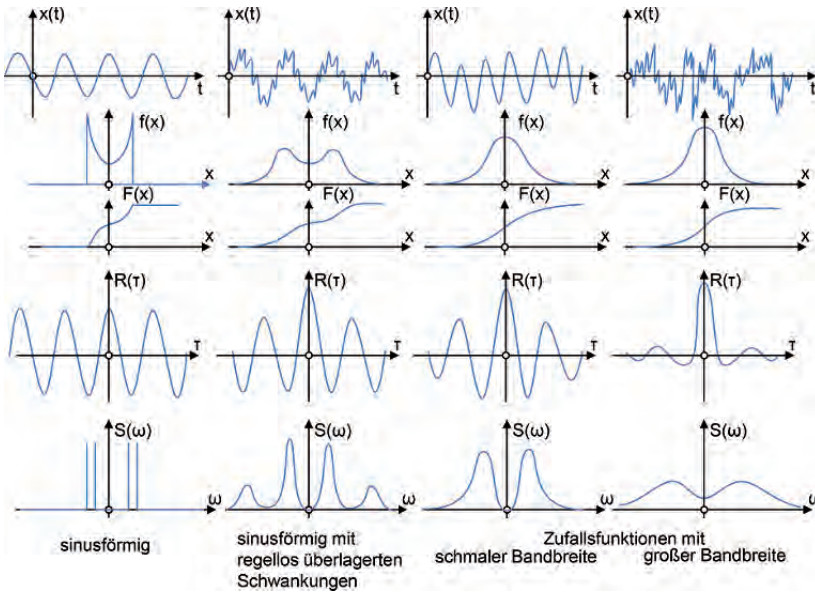


Bild 47. Schematische Charakterisierung unterschiedlicher Signaltypen auf der Basis von Dichte- und Verteilungsfunktion sowie Autokorrelations- und Leistungsdichtefunktion [2]

Auch wenn es sich bei spektralen (Leistungs-)Dichtefunktionen im Allgemeinen auch um komplexwertige Funktionen handelt, so hat sich hierfür die Bezeichnung $S_{xy}(\omega)$ anstelle von $S_{xy}(j\omega)$ durchgesetzt.

In Bild 48 ist exemplarisch das Übertragungsverhalten eines Einfreiheitsgradsystems infolge regelloser Windwirkungen dargestellt.

Die interessierende Varianz der daraus resultierenden Bauwerksschwingungen kann über eine i. d. R. numerisch durchzuführende Integration über die spektrale Leistungsdichte der Systemantwort gewonnen werden. Wie bereits angedeutet, ist hierbei auf den Definitionsbereich der spektralen Dichtefunktion der Anregung zu achten, d. h. es ist zu unterscheiden, ob zwischen minus und plus unendlich oder zwischen null und plus unendlich zu integrieren ist.

Bei der Beschreibung der Einwirkung kann man entweder auf reale Messdaten zurückgreifen oder sich für grundsätzliche Untersuchungen und Parameterstudien mit analytischen Formfunktionen behelfen. Beispielsweise lässt sich auf der Basis parametrisierter rationaler Funktionen eine ganze Reihe an Korrelations- oder Spektraldichteverläufen näherungsweise beschreiben (Bilder 49, 50).

$$K_1(\xi) = \sigma^2 e^{-\alpha|\xi|}$$

$$S_1(\omega) = \sigma^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \quad (41)$$

$$K_2(\xi) = \sigma^2 e^{-\alpha|\xi|} \cos(\beta\xi)$$

$$S_2(\omega) = \sigma^2 \frac{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2 + \omega^2)}{(\alpha^2 + \beta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2} \quad (42)$$

Im Falle schwach gedämpfter Systeme und somit schmalbandiger Schwingungsreaktion kann die Varianz derselbigen infolge regelloser Anregung vereinfachend unter der Annahme konstanter Spektraldichtefunktionen ermittelt werden. Die Güte dieser oftmals sehr zutreffenden Näherung steigt mit sinkender Systemdämpfung und steigender Breitbandigkeit der Anregung. Wird der Wert der spektralen Leistungsdichte an der Resonanzstelle des betrachteten Schwingungssystems $S_{pp} = S_{pp}(\omega_0) = \text{const.}$ unterstellt, so folgt die Varianz der Schwingungsantwort eines gedämpften Einfreiheitsgradsystems zu

$$\sigma_{uu}^2 = \frac{S_{pp}(\omega_0)\omega_0}{4 D k^2} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_{uu} = \frac{\sqrt{S_{pp}(\omega_0)\omega_0}}{2 k \sqrt{D}} \quad (43)$$

Im Vergleich dazu folgen Maximalwert und Varianz der Schwingungsantwort eines resonant erregten Einfreiheitsgradsystems auf eine harmonische Anregung, welche dann auch als Effektivwert bezeichnet wird, zu:

$$\hat{u} = \frac{F_0}{k} \frac{\pi}{\Lambda} \quad \sigma_u = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F_0}{k} \frac{\pi}{\Lambda} \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{F_0}{k} \frac{1}{2D} \quad (44)$$

Während im determinierten Resonanzfall die Dämpfung linear in den Nenner eingeht, so steht diese im Fall regelloser Einwirkungen unter der Wurzel. Daraus wird auch deutlich, dass der Einfluss der Dämpfung im Falle von Zufallsschwingungen weniger dominant ist, was nicht zuletzt auf die breitbandige Anregung zurückzuführen ist, da die Energie der Schwingungsanregung nicht auf den Bereich der Resonanzstelle konzentriert, sondern über einen breiten Frequenzbereich verteilt ist.

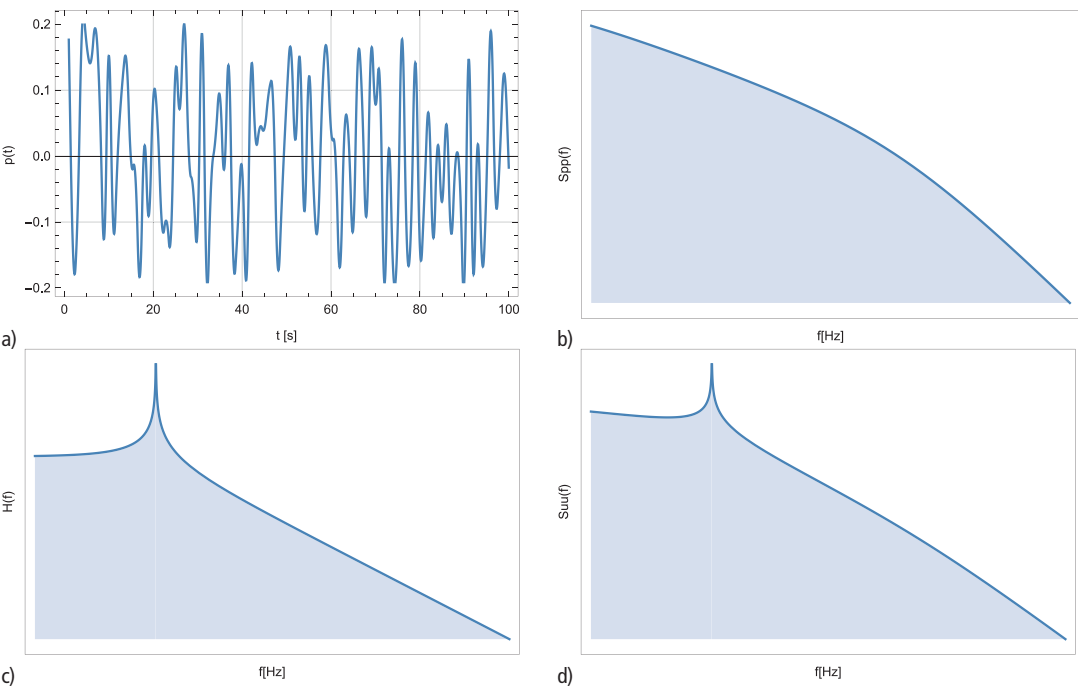


Bild 48. Schematische Darstellung des Übertragungsverhaltens linearer Einfreiheitsgradsysteme infolge regelloser Systemanregung; a) Zeitverlauf der Kraftanregung $p(t)$, b) spektrale Dichte der Kraftanregung $S_{pp}(f)$, c) Frequenzgangfunktion $H(f)$ (Betrag), d) spektrale Dichte der Schwingungsantwort $S_{uu}(f)$

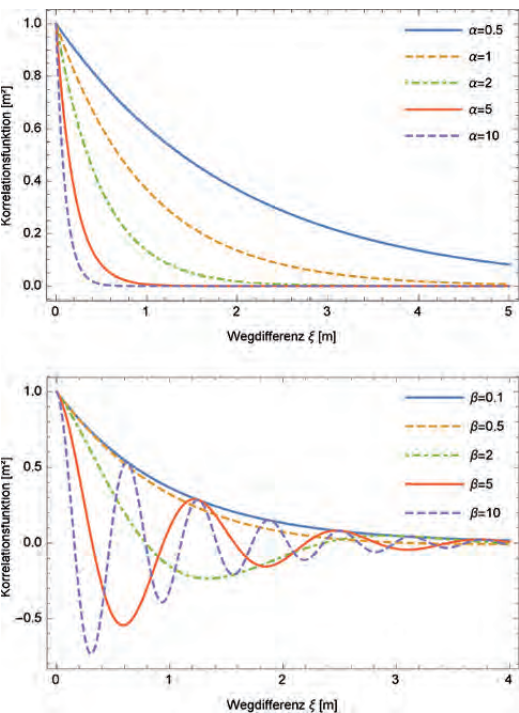


Bild 49. Parametrisierte Autokorrelationsfunktionen $K_1(\xi)$ und $K_2(\xi)$

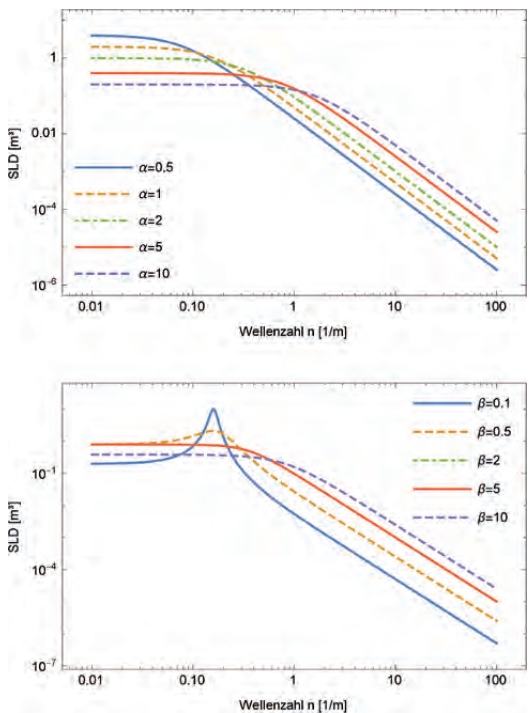


Bild 50. Zugehörige spektrale Dichtefunktionen

Beispiel 3

Als Beispiele für die stochastische Erregung eines Einfreiheitsgradsystems wird ein idealisiertes Modell eines aufgeständerten Wasserspeichers unter böiger Windbeanspruchung betrachtet (Bild 51). Aufgrund der dominanten Masse und auch Windangriffsfläche des kugelförmigen Speichertanks im Vergleich zur schlanken und filigranen Turmstruktur kann dessen dynamisches Verhalten mit ausreichender Genauigkeit auf der Basis eines Einfreiheitsgradsystems beschrieben werden.

Die Ersatzfedersteifigkeit des Turmschafts folgt im ersten Schritt unter Vernachlässigung jeglicher Fundamentverdrehung mit dem Flächenträgheitsmoment des Schaftes

$$I_y = \frac{\pi}{4}(R^4 - r^4) = \frac{\pi}{4}(1,2^4 - 1,175^4) = 0,13153 \text{ m}^4 \quad \text{zu} \quad k = \frac{3EI}{L^3} = \frac{3 \cdot 210.000 \text{ E6} \cdot 0,13153}{35^3} = 1.932.685 \text{ N/m.}$$

Mit einem Gesamtgewicht der aufgeständerten Kugel von 600 t folgt die erste Biegeeigen-

$$\text{frequenz zu } f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.932.685}{600.000}} = 0,29 \text{ Hz.}$$

Um zu überprüfen, inwieweit der Einfluss der nachgiebigen Fundamenteinspannung einen Einfluss auf die Schwingzeit hat, wird die Drehfedersteifigkeit der gegebenen Fundamentabmessungen und Bodenkennwerte abgeschätzt. Gemäß [2] kann die Drehfeder zu

$K = ab^2 \frac{E}{i k}$ berechnet werden, wobei a und b die Fundamentabmessungen, E der Elastizitätsmodul des Baugrunds sowie i und k Beiwerte zur Berücksichtigung der Fundamentgeometrie sowie der Baugrundsichtung darstellen (s. a. Abschnitt 3). Wird von einem mitteldicht gelagerten Kiessand als Baugrund ausgegangen, so kann dafür aus Erfahrungswerten eine mittlere Steifzahl von $S = 100 \text{ E } 6 \text{ N/m}^2$ sowie daraus abgeleitet ein E-Modul von $E = \frac{1 - \mu - 2\mu^2}{1 - \mu} S = 74,3 \text{ E6 N/m}^2$ angegeben werden. Wird darüber hinaus eine große

Mächtigkeit der nachgiebigen Sandschicht unterstellt, so folgen die Beiwerte $i = 4,64$ und $k = 0,76$ sowie die Drehfederkonstante zu $K = ab^2 \frac{E}{i k} = 7 \cdot 7^2 \cdot \frac{74,3 \text{ E6}}{4,64 \cdot 0,76} = 7,2 \text{ E9 N/rad}$. Mit der Turmhöhe von 35 m folgt daraus eine äquivalente horizontale Ersatzfeder von $7,2 \text{ E9/35 m} = 206 \text{ E6 N/m}$, die im Vergleich zur Ersatzfedersteifigkeit des Schafts von $1,9 \text{ E6}$ deutlich größer ist und somit die Vernachlässigung der Fundamentverdrehung im vorliegenden Fall gerechtfertigt war. Läge die Ersatzfedersteifigkeit der Fundamentverdrehung und diejenige der Biegeweichheit der Schaftkonstruktion in ähnlicher Größenordnung, so wäre eine Gesamtersatzfedersteifigkeit unter Berücksichtigung einer Reihenschaltung der beiden Federn zu

$$k_{\text{gesamt}} = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \text{ zu ermitteln.}$$

Um die Varianz der Schwingungsamplituden infolge böiger Windbeanspruchung zu ermitteln, ist zunächst der Verlauf der spektralen Leistungsdichte der Windkraftanregung zu bestimmen (Bilder 52, 53). Dieser wird in Anlehnung an die Angaben in DIN EN 1991-4 zu

$$S_L(f_L) = \frac{6,8 f_L(z, f)}{(1 + 10,2 f_L(z, n))^{5/3}} \quad (45)$$

bzw.

$$S_{vv}(f) = S_L(f_L) \frac{\sigma_v^2}{f} \quad (46)$$

festgelegt.

Als Anregung ist jedoch nicht die Windgeschwindigkeit, sondern die daraus resultierende Windkraftbeanspruchung von Interesse. Das Spektrum der Windkraft wird dabei vereinfachend aus der Windgeschwindigkeit unter Zugrundelegung einer aerodynamischen Übertragungsfunktion [9]

$$H_{\text{aero}}(f) = \frac{1}{1 + \left(\frac{2f \sqrt{A}}{v_m} \right)^{4/3}} \quad (47)$$

zu

$$S_{ww}(f) = S_{vv}(f) (\rho v_m c_f b l)^2 H_{\text{aero}}(f)^2 \quad (48)$$

ermittelt. Unter Zugrundelegung der Windangriffsfläche der Kugel von ca. $78,5 \text{ m}^2$ folgt das in Bild 54 dargestellte Kraftanregungsspektrum.

Wird das Spektrum als konstant im Bereich der ersten Biegeeigenfrequenz von 0,29 Hz angenommen sowie ein logarithmisches Dämpfungsdekrement der Struktur von $\Lambda = 0,01$ zugrunde gelegt (Bild 55), so folgt daraus ein Wert von $1,4 \text{ E7 N}^2\text{s}$ und daraus die Standardabweichung der Schwingbewegungen gemäß Gl. (43) näherungsweise zu $\sigma_{uu}^2 = \frac{S_{pp}(\omega_0) \omega_0}{4 D k^2}$

$$= \frac{1,4 \text{ E7} \cdot 2 \cdot \pi \cdot 0,29}{4 \cdot 0,0016 \cdot 1.932.685^2} = 1,068 \text{ E} - 3 \text{ m}^2 \text{ bzw.}$$

$\sigma = 0,033 \text{ m}$. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem



Idealisierte technische Daten:

Turmhöhe $H = 35 \text{ m}$

Schaft: $D = 2,40 \text{ m}$, $t = 25 \text{ mm}$

Kugeldurchmesser $D = 10 \text{ m}$

Gesamtgewicht der wassergefüllten Kugel = 600 t

Fundamentabmessungen $7 \text{ m} \times 7 \text{ m}$

Baugrund: Kiessand, mitteldicht gelagert

Bild 51. Exemplarische Darstellung eines Wasserturms

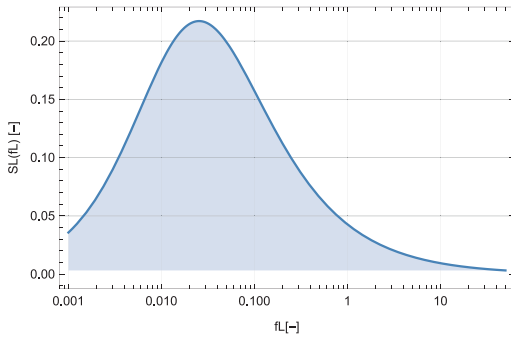


Bild 52. Spektrale Leistungsdichte $S_L(f_L)$ der Böengeschwindigkeit (normierte Darstellung)

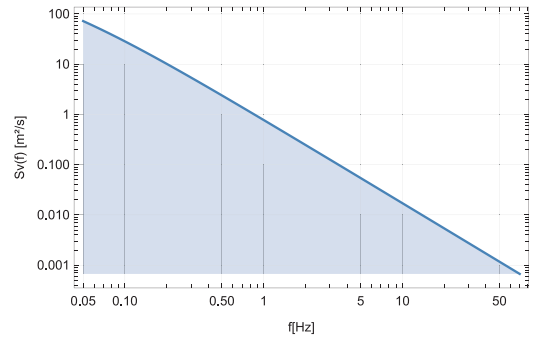


Bild 53. Spektrale Leistungsdichte $S_w(f)$ der Böengeschwindigkeit (nicht normierte Darstellung für den baupraktisch maßgebenden Frequenzbereich)

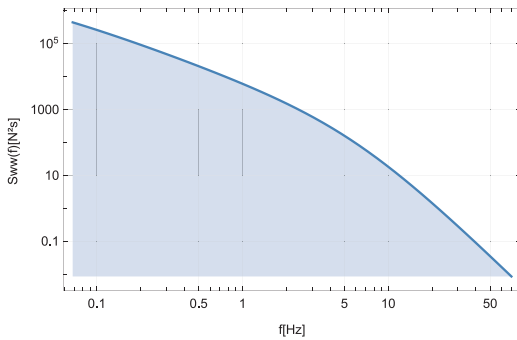


Bild 54. Spektrum der Kraftanregung der Kugel

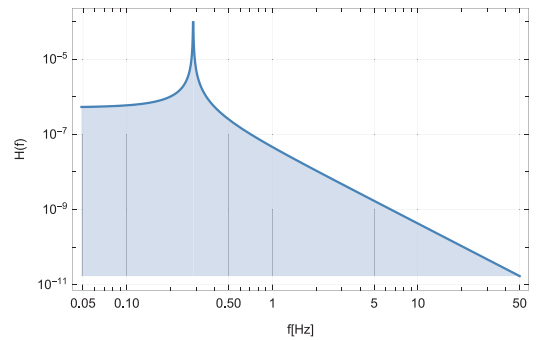


Bild 55. Frequenzgangfunktion des kinetisch äquivalenten EFG-Systems

exakten Wert von $\sigma = 0,024$, den man aus der Integration über die spektrale Leistungsdichte der Systemantwort erhält, erkennt man, dass es sich um eine brauchbare und auf der sicheren Seite liegende Näherung handelt. Die Güte dieser Näherung hängt stark vom Verlauf der Leistungsdichte der Windanregung ab und nimmt mit sinkender Dämpfung zu.

Für eine sichere Dimensionierung einer Konstruktion sind i. d. R. jedoch nicht die Mittelwerte und Varianzen von Bedeutung, sondern vielmehr die zugehörigen Extremwerte des zugrunde liegenden Prozesses. Entscheidende Kenngrößen sind dabei die Anzahl der steigenden (oder fallenden – werden hier nur in einer Richtung gezählt) Nulldurchgänge N_0 sowie die Anzahl der Maximalamplituden N_1 (auch hierbei werden entweder die positiven oder negativen Maxima betrachtet) pro Zeiteinheit

$$N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_0^\infty \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega}{\int_0^\infty S_{xx}(\omega) d\omega}} \quad (49a)$$

$$N_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\int_0^\infty \omega^4 S_{xx}(\omega) d\omega}{\int_0^\infty \omega^2 S_{xx}(\omega) d\omega}} \quad (49b)$$

die wie ersichtlich aus den zugehörigen Spektraldichtefunktionen abgeleitet werden können [2]. Ebenfalls von Interesse ist die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der (Spitzen-)Amplitudenwerte (nicht Extremwerte), die sich durch das Verhältnis $\alpha = N_0/N_1$ sowie der Standardabweichung des zugrunde liegenden Prozesses σ_x beschreiben lässt:

$$f_{\text{spitze}}(\xi) = (1 - \alpha^2) \frac{1}{\sqrt{2\pi(1 - \alpha^2)\sigma_x}} e^{\left(-\frac{1}{2(1 - \alpha^2)\sigma_x^2} \xi^2\right)} + \alpha F_{\text{Gauß}}\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} \frac{\xi}{\sigma_x}\right) \frac{\xi}{\sigma_x^2} e^{\left(-\frac{1}{2\sigma_x^2} \xi^2\right)} \quad (50)$$

Neben der Verteilung der Maximalamplituden sind für eine sichere Dimensionierung einer Baukonstruktion jedoch insbesondere die Dichtefunktion der zugehörigen Extremwerte bestimmend (Bild 56). Die Anzahl der in einer Richtung auftretenden Überschreitungen eines

bestimmten Amplitudenniveaus sowie die daraus abzuleitende Dichtefunktion der Extremwerte, die naturgemäß abhängig von der zugrunde liegenden Beobachtungsdauer T ist, können zu

$$N_{\xi} = N_0 e^{\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}}$$

$$f_{\text{extrem}}(\xi) = \frac{TN_0}{\sigma_x} \frac{\xi}{\sigma_x} \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right] \exp\left[-TN_0 \exp\left[-\frac{\xi^2}{2\sigma_x^2}\right]\right] \quad (51)$$

bestimmt werden. In Bild 57 sind entsprechende Dichtefunktionen für ausgewählte Beobachtungszeiträume dargestellt. Daraus ist zu erkennen, dass sich die Dich-

tefunktionen für ausreichend lange Beobachtungszeiträume sehr eng um den Mittelwert

$$\mu_{\xi} = \sigma_x \left(\sqrt{2 \ln(TN_0)} + \frac{0,5772}{\sqrt{2 \ln(TN_0)}} \right) = \text{Spitzenfaktor } k_p \quad (52)$$

gruppieren. Somit kann dieser auch mit i. d. R. ausreichender Sicherheit der Dimensionierung von Tragwerken zugrunde gelegt werden. Auf diese Weise wurde z. B. von *Davenport* seinerzeit der Böenreaktionsfaktor für schwingungsanfällige Konstruktionen definiert (s. a. Abschnitt 5.3.1).

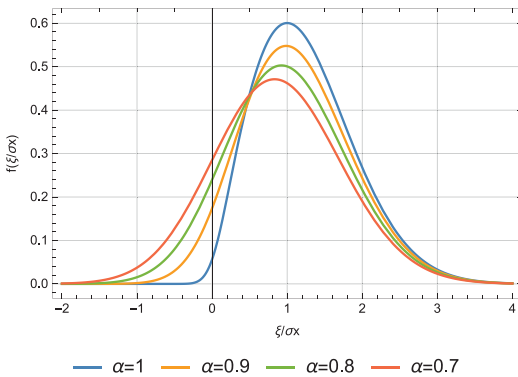


Bild 56. Dichtefunktion der Maximalamplituden für unterschiedliche Verhältnisse α .

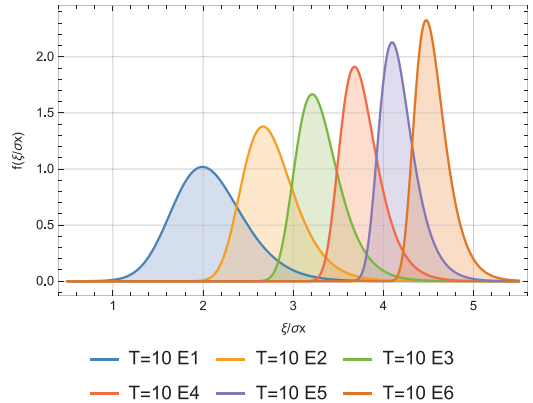


Bild 57. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Extremwerte für unterschiedliche Beobachtungszeiträume T [s]

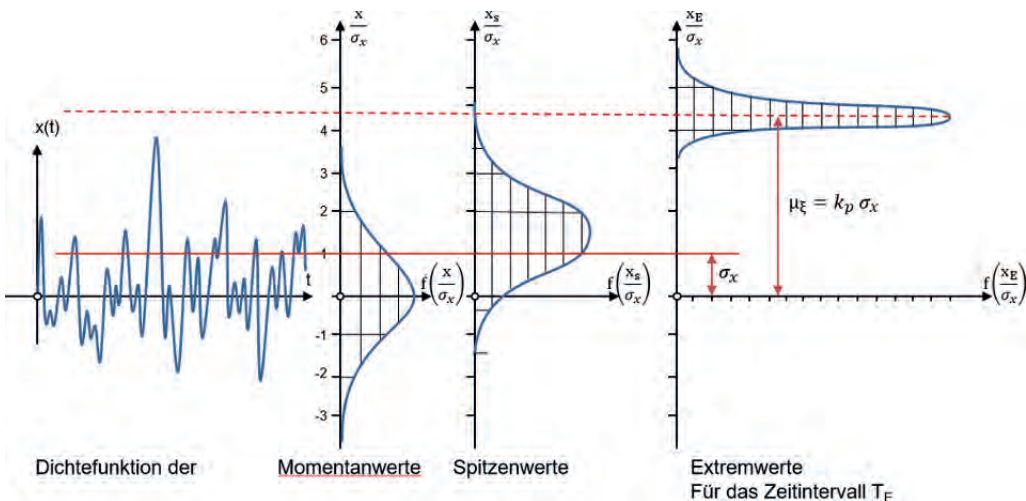


Bild 58. Schwingungsreaktion, Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Momentanwerte, Spitzenwerte und Extremwerte des zugrunde liegenden stochastischen Prozesses [2]

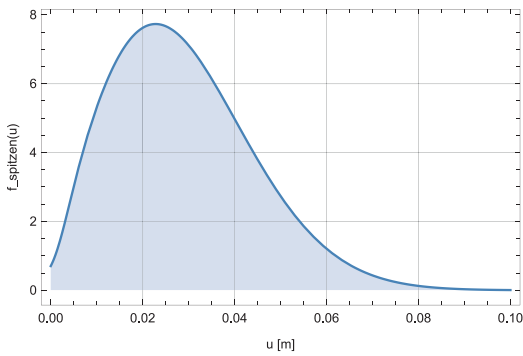


Bild 59. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Spitzenwerte der Schwingungsamplituden

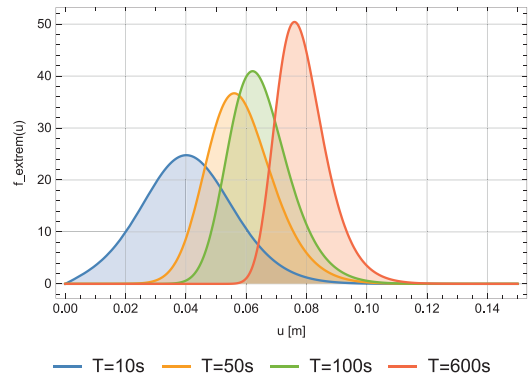


Bild 60. Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Extremwerte in Abhängigkeit des Betrachtungszeitraums

Fortsetzung zu Beispiel 3

Soll für den im Beispiel 2 betrachteten Wasserbehälter eine Dimensionierung oder Sicherheitsbewertung durchgeführt werden, so kann dafür die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der Extremwerte der Schwingungsreaktion gemäß Bild 58 zugrunde gelegt werden. Die Werte N_0 und $N_{\max}$ ergeben sich für das vorliegende Beispiel zu $N_0 = 0,28284$ und $N_{\max} = 0,28589$. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen der Spitzen- und Extremwerte sind in den Bildern 59 und 60 dargestellt. Wird beispielsweise, wie bei windinduzierten Schwingungen üblich, eine Beobachtungsdauer von 10 min, d. h. 600 s, herangezogen, so folgt daraus ein Spitzenfaktor von 3,38 sowie ein Mittelwert für die extremalen Schwingungsamplituden von ca. 7,8 cm.

Bislang wurden ausschließlich Systeme mit einem Freiheitsgrad betrachtet. Sämtliche aufgezeigten Betrachtungsweisen und Lösungsansätze können jedoch auch zur Ermittlung der Schwingungsantwort von Systemen mit grundsätzlich beliebig vielen Freiheitsgraden herangezogen werden, sofern die im Allgemeinen gekoppelten Differenzialgleichungssysteme von Mehrfreiheitsgradsystemen durch eine sogenannte modale Transformation in n voneinander unabhängig lösbare Schwingungsdifferenzialgleichungen überführt werden. Einzige Voraussetzung ist ein lineares Systemverhalten und somit die Anwendbarkeit des Superpositionsgesetzes.

2.3 Mehrfreiheitsgradsysteme

Können die interessierenden Schwingungseigenschaften der zu untersuchenden Konstruktion nicht mehr sinnvoll auf einen Freiheitsgrad beschränkt bleiben, so können die dann im Falle diskreter Systeme mit n Freiheitsgraden auftretenden n gekoppelten Differenzialgleichungen der Form

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t) \quad (53)$$

entweder als gekoppeltes Differenzialgleichungssystem gelöst oder über eine sogenannte Modalanalyse, d. h. durch eine geschickt gewählte Koordinatentransformation, in n -entkoppelte Differenzialgleichungen überführt werden. Die dabei entstehenden Einzelgleichungen können dann gemäß den unter Abschnitt 2.1 aufgezeigten Ansätzen gelöst und anschließend zur Gesamtreaktion zusammengeführt werden.

2.3.1 Lösung als gekoppeltes DGL-Systems – Frequenzgangmatrizen

In der Praxis wird das gekoppelte Differenzialgleichungssystem (53) oftmals näherungsweise durch eine numerische Integration gelöst. Hierfür steht eine ganze Reihe an Integrationsalgorithmen zur Verfügung, auf welche hier nicht im Detail eingegangen werden soll (s. hierfür [12, 13]).

Eine exakte Lösung der gekoppelten Differenzialgleichung auf eine determinierte Anregung kann analog zu Gl. (28) im Fourier-transformierten Frequenzraum zu

$$\mathbf{U}(j\omega) = \mathbf{H}(j\omega)\mathbf{P}(j\omega) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{U}(jf) = \mathbf{H}(jf)\mathbf{P}(jf) \quad (54)$$

gefunden werden, wobei $\mathbf{U}(j\omega)$ den Vektor der Schwingungsantworten, $\mathbf{P}(j\omega)$ den Vektor der Kraftanregung und $\mathbf{H}(j\omega)$ die Frequenzgangmatrix darstellen. Für

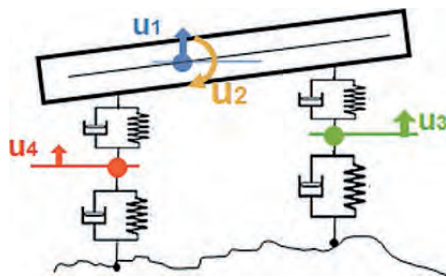


Bild 61. Ebenes Halbfahrzeugmodell [9]

Schwingungssysteme mit einer geringen bis mittleren Anzahl an Freiheitsgraden kann diese über eine Invertierung des Gleichungssystems zu

$$\mathbf{H}(j\omega) = [-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{D} + \mathbf{K}]^{-1} \quad \text{bzw.}$$

$$\mathbf{H}(jf) = [-(2\pi f)^2 \mathbf{M} + j2\pi f \mathbf{D} + \mathbf{K}]^{-1} \quad (55)$$

ermittelt werden. Auch für Mehrfreiheitsgradsysteme können grundlegende Analysen eines Schwingungssystems bereits aus einer qualitativen Betrachtung der einzelnen Frequenzgangfunktionen $H_{ij}(j\omega)$ durchgeführt werden. Insbesondere die Betrachtung der Nebendiagonalelemente gibt Aufschluss über die Kopplung der einzelnen Freiheitsgrade untereinander (Bilder 62, 63). Wird exemplarisch das Schwingungsverhalten eines zweiachsigen Fahrzeugs auf der Basis eines Starrkörpermodells mit vier Freiheitsgraden betrachtet, so zeigt sich Bild 61 [9].

Dabei beschreibt der erste Freiheitsgrad die Hubbewegungen des Fahrzeugaufbaus, der zweite dessen Nickbewegungen sowie Freiheitsgrad drei und vier die Vertikalschwingbewegungen der Vorder- und Hinterachse [9].

Sind die Schwingungsreaktionen im Zeitbereich von Interesse, so können diese aus den exakten Lösungen im Frequenzbereich über eine inverse Fourier-Trans-

form erhalten werden. Da diese Transformation i. d. R. auch numerisch durchzuführen ist, stellen die auf diese Weise gefundenen Lösungen allerdings ebenfalls nur Näherungen dar.

Als weiteres Beispiel werden die Frequenzgangfunktionen einer vertikalen Kragstruktur, z. B. eines Schornsteins oder eines Turms, für unterschiedliche Höhen dargestellt, wobei erneut sehr anschaulich der Unterschied zwischen einer linearen Darstellung sowie einer logarithmierten Darstellung deutlich wird, Letztere jedoch für die Bewertung höherer Eigenfrequenzen klar zu bevorzugen ist (Bilder 64, 65).

Im Falle größerer Systeme kann die Invertierung der Gl. (55) durchaus zu numerischen Problemen führen. Dann empfiehlt sich der Aufbau der Frequenzgangmatrix aus den Eigenvektoren (s. a. Abschnitt 2.3.2) zu

$$\mathbf{H}(f) = \sum_{k=1}^N \frac{\Phi_k \Phi_k^T}{j2\pi f - \lambda_k} \quad (56)$$

Der besondere Reiz dieser Vorgehensweise ist neben der Vermeidung numerischer Probleme bei der Invertierung großer Gleichungssysteme, dass eine ausreichende Approximation der Frequenzgangmatrix i. d. R. bereits unter Zugrundelegung weniger elementarer Eigenschwingformen ermittelt werden kann. Zudem ist auf

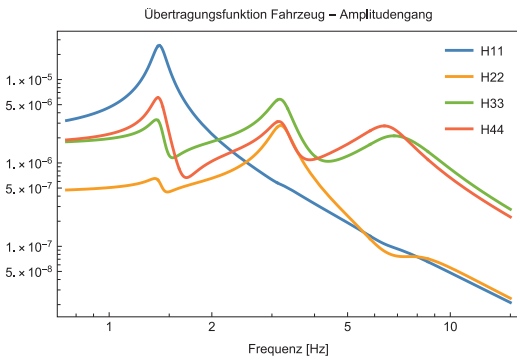


Bild 62. Hauptdiagonalelemente der Frequenzgangmatrix

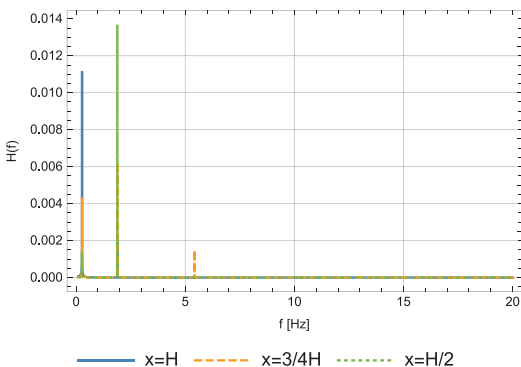


Bild 64. Amplitudengang – lineare Darstellung

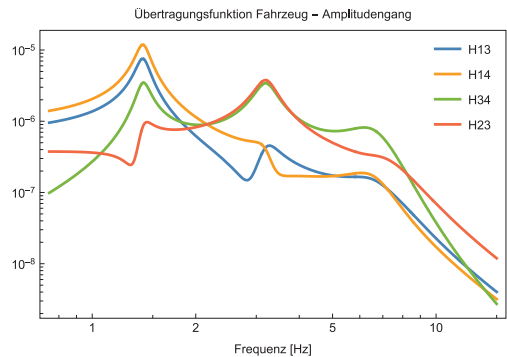


Bild 63. Nebendiagonalelemente der Frequenzgangmatrix

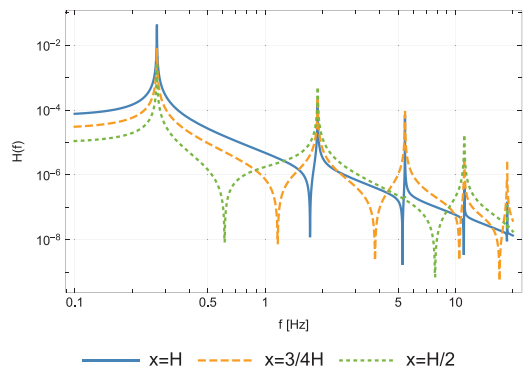


Bild 65. Amplitudengang – doppeltlogarithmische Darstellung

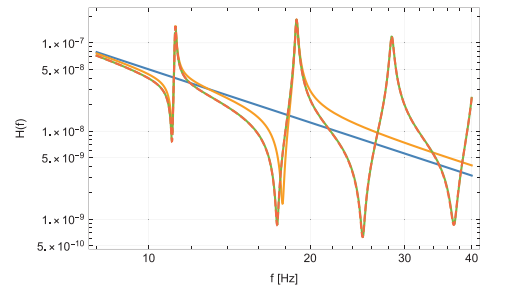
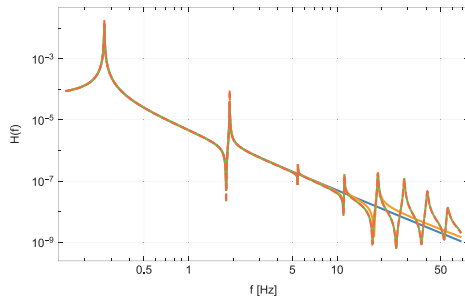


Bild 66. Frequenzgangfunktion $H_{uu}(f)$ einer frei auskragenden Turmkonstruktion in Abhängigkeit der Anzahl verwendeter Eigenformen

diese Weise auch die Ermittlung der Frequenzgangmatrix auf der Basis experimentell bestimmter Eigenschwingformen und Eigenfrequenzen möglich.

Bild 66 enthält eine Gegenüberstellung der Frequenzgangfunktion $H_{uu}(f)$ einer turmartigen Konstruktion. Betrachtet wird die Horizontalauslenkung an der Kragarmspitze in Abhängigkeit der Anzahl der für den Aufbau der Frequenzgangmatrix gemäß Gl. (56) berücksichtigten Eigenschwingformen. Daraus wird deutlich, dass eine zufriedenstellende Approximation des exakten Verlaufs im interessierenden Frequenzbereich häufig bereits unter Berücksichtigung weniger Eigenschwingformen gegeben ist. Die erste Biegeeigenfrequenz des betrachteten Systems liegt bei ca. 0,2 Hz. Für $N = N_{\max}/8$ ist beispielsweise bis ca. 10 Hz eine ausreichende Übereinstimmung gegeben.

Kann die Einwirkung nicht mehr zufriedenstellend als determinierte Funktion beschrieben werden, so muss wiederum auf eine Beschreibung auf der Basis stochastischer Prozesse zurückgegriffen werden [1, 2]. Das Formulieren und auch Auswerten der mathematischen Lösung in der Form

$$S_{uu}(f) = \bar{H}(f) S_{pp}(f) H^T(f) \quad (57)$$

bei welcher die spektrale Dichtematrix der Kraftanregung von links mit der konjugierten und von rechts mit der transponierten Frequenzgangmatrix zu multiplizieren ist, gestaltet sich relativ einfach und bereitet unter Zuhilfenahme geeigneter Mathematikverarbeitungssoftware (z. B. Mathematica, Matlab etc.) i. d. R. keine größeren Schwierigkeiten.

Die Herausforderung im Zusammenhang mit Gl. (57) besteht vielmehr im Auffinden der Spektralmatrix $S_{pp}(f)$ der Systemanregung. Hierbei müssen neben den Autoleistungsdichtefunktionen der einzelnen stochastischen Anregungsprozesse in den jeweiligen Systemfreiheitsgraden – diese bilden die Hauptdiagonalelemente in $S_{pp}(f)$ – auch die auf den Nebendiagonalelementen vorhandenen Kreuzleistungsdichtefunktionen berücksichtigt werden. Diese beschreiben die stochastische Abhängigkeit der Anregungsprozesse in den einzelnen Freiheitsgraden und weisen zudem im Allgemeinen eine Phaseninformation auf. In der Praxis liegt aufgrund der

oftmals fehlenden Information genau darin die Schwierigkeit und so muss oftmals mit teilweise groben Näherungen gearbeitet werden.

Der einfachste Ansatz besteht naturgemäß in einer vollständigen Vernachlässigung der stochastischen Abhängigkeit beispielsweise der betrachteten Windgeschwindigkeiten über die Konstruktionshöhe. Im Falle stochastisch unabhängiger Prozesse reduziert sich die Spektraldichtematrix der Windgeschwindigkeiten auf eine Diagonalmatrix mit den Leistungsdichtefunktionen $S_{ii}(f)$ der Strömungsgeschwindigkeiten an den diskretisierten Höhenpunkten.

Für eine exakte Beschreibung des als stationär vorausgesetzten Strömungsfelds ist eine Einbeziehung der Kreuzspektraldichtefunktionen auf den Nebendiagonalelementen der Spektraldichtematrix, die beispielsweise aus simultan gemessenen Windgeschwindigkeitsverläufen in den jeweiligen Höhenpunkten approximiert werden können, erforderlich. Da in der Praxis diese Informationen häufig nicht zur Verfügung stehen, wird oftmals auf Näherungen für die Kreuzleistungsdichtefunktionen auf der Basis verallgemeinerter Kohärenzfunktionen zurückgegriffen. Dabei werden ausgehend von Gl. (39) die Nebendiagonalelemente aus den Autoleistungsdichtefunktionen geschätzt. Zu beachten gilt es dabei, dass aufgrund der Betragsbildung jegliche Phaseninformation verloren geht und die Nebendiagonalelemente rein reelle Größen darstellen.

Als Beispiel soll an dieser Stelle die Beschaffenheit der Spektraldichtematrix der Windkraft über die Höhe der Turmstruktur aufgezeigt werden (für ähnliche Überlegungen im Hinblick auf fahrbahnebenenheitsinduzierte Fahrzeugschwingbewegungen wird auf [9] verwiesen). Wird als Kohärenzfunktion für die Windgeschwindigkeit die Bedingung [10]

$$\gamma_{v_i v_j}(z, f) = e^{-\frac{f C_{vz}(z_i - z_j)}{\frac{1}{2}(v_m(z_i) - v_m(z_j))}} \quad (58)$$

eingeführt (s. exemplarisch Bild 68), so können die Einträge in der Spektralmatrix der Windgeschwindigkeit vereinfachend sowie unter Vernachlässigung der Phasenbeziehungen zwischen den einzelnen Bauwerksbereichen zu

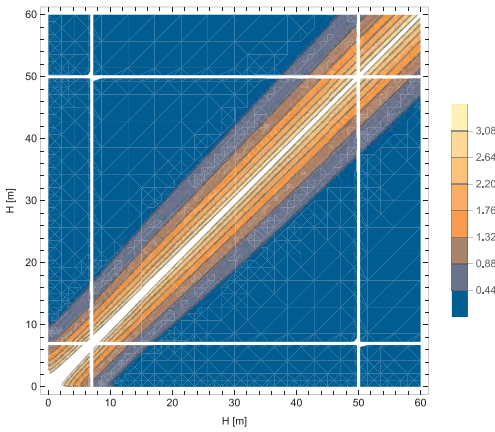


Bild 67. Spektrale Leistungsdichtematrix der Windgeschwindigkeit über die Bauwerkshöhe

$$|S_{v_i v_j}(z, f)|^2 = \gamma_{v_i v_j}(z, f)^2 S_{v_i v_i}(z, f) S_{v_j v_j}(z, f) \quad (59)$$

festgelegt werden. Die spektrale Leistungsdichtematrix

$$S_w(f) = \begin{bmatrix} S_{v_1 v_1} & S_{v_1 v_2} & \dots & S_{v_1 v_n} \\ S_{v_2 v_1} & S_{v_2 v_2} & \dots & S_{v_2 v_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{v_n v_1} & S_{v_n v_2} & \dots & S_{v_n v_n} \end{bmatrix} \quad (60)$$

ist dann eine voll besetzte Matrix, wobei die fern der Hauptdiagonalen angeordneten Nebendiagonalelemente aufgrund der stark mit der Entfernung abfallenden Kohärenz sehr geringe Werte aufweisen (s. Bild 67).

2.3.2 Modalanalyse

Alternativ zu den im Allgemeinen zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen herangezogenen physikalischen Lagekoordinaten können unter der Voraussetzung linearer Systemeigenschaften die sogenannten modalen Koordinaten, d. h. die Eigenschwingformen, zur Beschreibung des zeitlichen Schwingungsverhaltens einer Konstruktion oder eines Systems herangezogen werden und die dynamische Verformung des Systems zu jedem Zeitpunkt als Superposition der Eigenvektoren (s. bei-

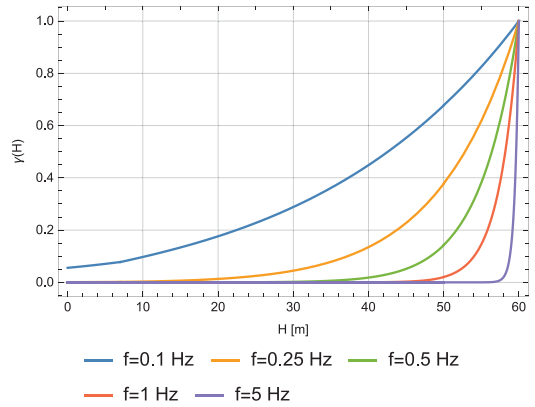


Bild 68. Kohärenz der Windgeschwindigkeit über die Bauwerkshöhe für unterschiedliche Frequenzen

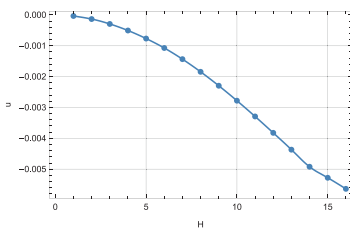
spielsweise die exemplarisch dargestellten ersten drei Eigenformen einer horizontalen Kragstruktur in Bild 69) des zugrunde liegenden Differenzialgleichungssystems multipliziert mit den jeweils zugehörigen Zeitverlaufsfunctionen in der Form

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{Y}(t) = \sum_{i=1}^N \Phi_i y_i(t) = \Phi_1 y_1(t) + \Phi_2 y_2(t) + \dots \quad (61)$$

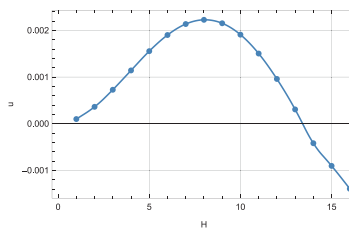
beschrieben werden. Dabei stellt $\mathbf{u}(t)$ den zeitlich veränderlichen Vektor in physikalischen Lagekoordinaten dar. Die Modalmatrix, in der sämtliche Eigenvektoren angeordnet werden, wird mit $\Phi = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \dots, \Phi_N]$ bezeichnet. In $\mathbf{Y}(t) = [Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t), \dots, Y_N(t)]^T$ werden schließlich die N zugehörigen Zeitverlaufsfunctionen zusammengefasst.

Die Eigenwerte, d. h. die Eigenfrequenzen sowie die zugehörigen Eigenvektoren, werden an dieser Stelle als bekannt vorausgesetzt. Zu deren Berechnung steht eine Vielzahl von Rechenprogrammen zur Verfügung.

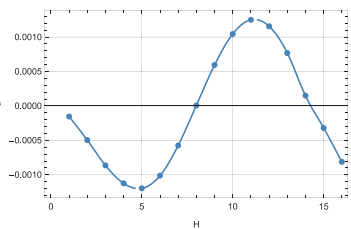
Lässt sich die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$ in Gl. (53) als Linearkombination der Massen- und Steifigkeitsmatrix in der Form $\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K}$ darstellen, dann und nur dann vermögen die Eigenvektoren des zugeordneten ungedämpften Systems die Differenzialgleichung zu entkoppeln. Man spricht dann auch von einer proportionalen



1. Eigenform



2. Eigenform



3. Eigenform

Bild 69. Eigenformen einer mit finiten Elementen diskretisierten Kragstruktur



Bild 70. Abluftkamine mit Schwingungsdämpfer

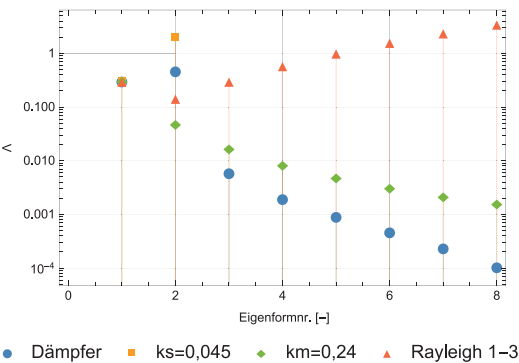


Bild 71. Gegenüberstellung der modalen Dämpfungswerte

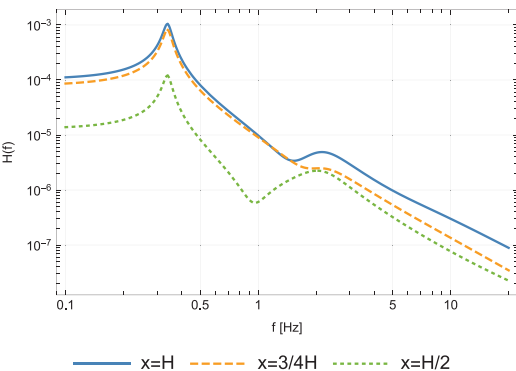


Bild 73. Frequenzgangfunktion $H_{uu}(f)$ für eine steifigkeitsproportionale Dämpfungsmatrix mit $D = k_s \cdot K = 0,045 \cdot K$

Dämpfung (weiteres zum Ansatz der Dämpfung s. Abschnitt 3.2). Allerdings sei bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für den Fall diskreter, d. h. einzelner Dämpferelemente wie beispielsweise bei Schornsteinen oder Turmbauwerken verwendet, ein proportionaler Dämpfungsansatz nicht mehr zielführend sein kann.

Beispiel 4

Es wird ein Abluftkamin mit einer Höhe von 60 m, einem Durchmesser von 1,20 m sowie einer Manteldicke von 5 mm betrachtet (Bild 70). Dieser soll durch einen Schwingungsdämpfer mit einer kinetisch wirksamen Masse von 106 kg im Mündungsbereich bedämpft werden. Die federelastische Anbindung der Dämpfermasse wird auf die erste Biegeeigenfrequenz abgestimmt und mit einer Federsteifigkeit von 473 N/m sowie einer Dämpfungskonstanten von 55 Ns/m ausgebildet.

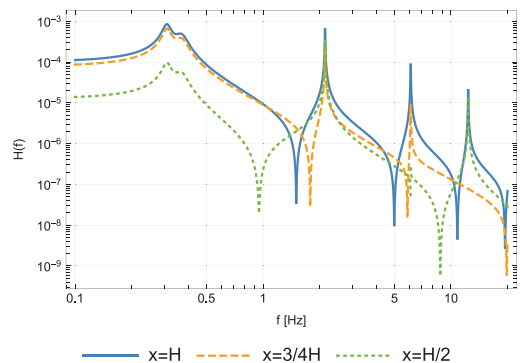


Bild 72. Frequenzgangfunktion $H_{uu}(f)$ für einen diskreten Schwingungsdämpfer im Mündungsbereich mit einer Dämpfungskonstanten $d = 55$ Ns/m

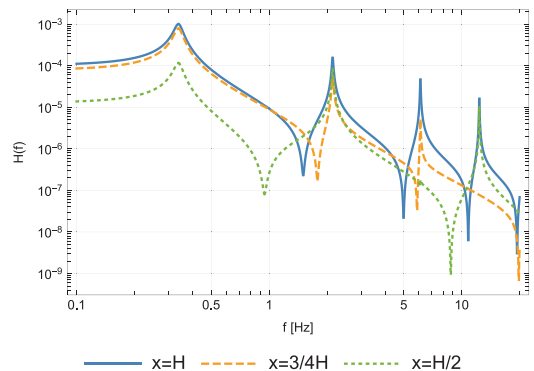


Bild 74. Frequenzgangfunktion $H_{uu}(f)$ für eine masseproportionale Dämpfungsmatrix mit $D = k_m \cdot M = 0,21 \cdot M$

Der Dämpfer stellt ein diskretes Dämpfungselement dar und kann somit wie oben erläutert nur sehr eingeschränkt über einen proportionalen Dämpfungsansatz beschrieben werden. Nachfolgend wird zum einen die exakte Frequenzgangfunktion $H_{uu}(f)$ unter Berücksichtigung der komplexen Eigenvektoren bei Vernachlässigung jeglicher Strukturdämpfung dargestellt (Bild 72). Sollte dennoch das Schwingungsverhalten auf der Basis eines proportionalen Dämpfungsansatzes beschrieben und das logarithmische Dämpfungsdekrement beispielsweise der ersten Biegeeigenform der exakten Lösung als Bezugsgröße zugrunde gelegt werden, so folgen die in Bild 73 und Bild 74 dargestellten Frequenzgangfunktionen für einen steifigkeits- und einen masseproportionalen Dämpfungsansatz. Die modalen Dämpfungskenngrößen sind für die ersten fünf Eigenformen in Bild 71 dargestellt, wobei für den steifigkeitsproportionalen Dämpfungsansatz lediglich die ersten beiden Eigenformen harmonische Oszillationen bewirken und aufgrund des schnell ansteigenden Dämpfungsgrads alle weiteren Eigenformen gar nicht mehr zu Schwingbewegungen angeregt werden können, sondern lediglich zu aperiodisch abklingenden Bewegungen führen.

Vorerst wird jedoch weiter die Anwendbarkeit eines proportionalen Dämpfungsansatzes vorausgesetzt. Wird in die Differenzialgleichung nunmehr der modale Ansatz $\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{Y}(t)$ eingesetzt und die Bewegungsgleichung dann von links mit der transponierten Modalmatrix multipliziert, so reduzieren sich die im Allgemeinen voll besetzten Masse-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen aufgrund der sogenannten Orthogonalität der Eigenvektoren auf Diagonalmatrizen

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi \ddot{\mathbf{Y}}(t) + \Phi^T \mathbf{D} \Phi \dot{\mathbf{Y}}(t) + \Phi^T \mathbf{K} \Phi \mathbf{Y}(t) = \Phi^T \mathbf{p}(t) \quad (62)$$

mit den sogenannten generalisierten Größen auf den Hauptdiagonalen.

$$m_{\text{mod},i} = \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i$$

generalisierte Masse

$$k_{\text{mod},i} = \Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i = \omega_i^2 m_{\text{mod},i}$$

generalisierte Steifigkeit

$$d_{\text{mod},i} = \Phi_i^T \mathbf{D} \Phi_i = \alpha m_{\text{mod},i} + \beta k_{\text{mod},i}$$

generalisierte Dämpfung

$$p_{\text{mod},i} = m_{\text{mod},i} = \Phi_i^T \mathbf{p}$$

generalisierte Last

Dies kommt einer Entkopplung in N unabhängig voneinander lösbare Differenzialgleichungen in der Form

$$m_{\text{mod},i} \ddot{y}_i(t) + d_{\text{mod},i} \dot{y}_i(t) + k_{\text{mod},i} y_i(t) = p_{\text{mod},i}(t) \quad (63)$$

gleich. Da i. d. R. die Schwingungsamplituden in den physikalischen Lagekoordinaten interessieren, ist die Lösung gemäß Gl. (61) aus den ermittelten Einzellösungen für sämtliche zu berücksichtigende $y_i(t)$ zu superponieren.

Der große Vorteil der modalen Transformation liegt darin begründet, dass eine ausreichend genaue Abschätzung des realen Schwingungsverhaltens üblicher Konstruktionen bereits auf der Basis weniger Eigenvektoren gelingt und dadurch eine oftmals deutliche Reduzierung des Rechenaufwands vorgenommen werden kann.

Der Erregervektor $\mathbf{p}(t)$ beinhaltet im Allgemeinen sowohl die Information über die örtliche als auch über die zeitliche Variation der äußeren Kräfte. Für die Ermittlung der generalisierten oder modalen Lasten spielen jedoch aufgrund der zeitlich konstanten Eigenvektoren lediglich die örtlichen Komponenten eine Rolle, d. h., die zeitliche und örtliche Komponente können getrennt voneinander behandelt werden.

Darüber hinaus sei angemerkt, dass die Eigenvektoren lediglich bis auf einen konstanten Faktor und somit nicht absolut bestimmbar sind. Aus diesem Grund ist stets eine Normierung der Eigenvektoren erforderlich. Dabei sind je nach Anwendungsfall durchaus unterschiedliche Normierungen gebräuchlich. Im Hinblick auf eine übersichtliche Darstellung wird häufig die Maximalamplitude der jeweiligen Eigenform zu eins gesetzt. Besonders übersichtlich gestalten sich die entkoppelten Differenzialgleichungen für den Fall, dass $m_{\text{mod},i} = 1,0$ resultiert. Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die Länge des Eigenvektors auf eine bestimmte Größe, z. B. 1,0 zu normieren. Wichtig ist dabei nur, dass die modalen oder generalisierten Größen von der Wahl der Normierung abhängen. Die interessierenden physikalischen Verschiebungsgrößen ergeben sich aus einer Skalierung der modalen Werte, welche als Lösung des kinetisch äquivalenten Einfreiheitsgradsystems (s. Abschnitt 2.1) ermittelt werden, mit den Amplituden der zugehörigen Eigenschwingform (s. a. nachfolgende Beispiele). Die Eigenwerte als Invarianten des zugrunde liegenden Gleichungssystems sind hingegen unabhängig von der gewählten Normierung.

Liegen keine diskreten Systemmatrizen, wie sie beispielsweise für Starrkörpersysteme oder aber auch aus FE-Modellen resultieren, vor, so ist dem Grunde nach in analoger Weise die Ermittlung der Schwingungsantwort als Superposition beliebig vieler Eigenvektoren multipliziert mit den jeweiligen Zeitverlaufs-funktionen möglich. Die sogenannten generalisierten oder modalen Größen sind dann jedoch nicht mehr über Skalarprodukte zwischen den Systemmatrizen und den Eigenvektoren zu ermitteln.

Die modalen Größen ergeben sich beispielsweise für ein ebenes Stabsystem (Bild 75) zu:

$$m_{\text{mod},i} = \int_0^l m(x) \phi_i^2(x) dx + \sum_k \mathbf{M}_k \phi_i^2(x_k) + \sum_j \mathbf{I}_{\theta,j} \phi_i'^2(x_j) \quad [\text{kg}]$$

$$k_{\text{mod},i} = \int_0^l EI(x) \phi_i''^2(x) dx + \sum_k \mathbf{K}_k \phi_i^2(x_k) + \sum_j \mathbf{K}_{\theta,j} \phi_i'^2(x_j) \quad [\text{N/m}]$$

$$p_{\text{mod},i} = \int_0^l p(x) \phi_i(x) dx + \sum_k \mathbf{P}_k \phi_i(x_k) + \sum_j \mathbf{M}_{\theta,j} \phi_i'(x_j) \quad [\text{N}]$$

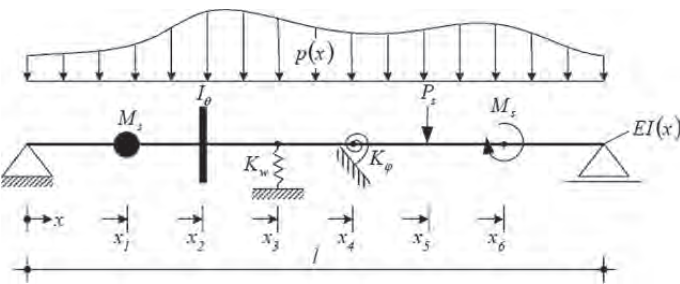


Bild 75. Ebenes Stabsystem und schwingungstechnisch relevante Größen [5]

wobei $m(x)$ die Massebelegung, $EI(x)$ die Biegesteifigkeit (je nach zu berücksichtigenden Freiheitsgraden sind noch weitere Anteile wie Schub- und Torsionssteifigkeit zu addieren) und $p(x)$ beliebig verteilte Streckenlasten darstellen. Mit M_k werden Einzelpunktmassen jeweils an der Stelle x_k , mit $I_{\theta,j}$ Rotationsmassenträgheiten einzelner Starrkörper am Ort x_j , mit K_k translatorische Federsteifigkeiten an der Stelle $x = x_k$, mit $K_{\theta,j}$ Drehfederkonstanten an der Stelle $x = x_j$ und P_k und $M_{\theta,j}$ schließlich Einzellasten- bzw. Einzelmomente an den Stellen $x = x_k$ und $x = x_j$ beschrieben. Die modalen Dämpfungsparameter werden in der Regel aus Erfahrungswerten für die einzelnen Eigenschwingformen angegeben.

Beispiel 5

Als Beispiel sei an dieser Stelle ein Einfeldträger mit konstanter Biegesteifigkeit EI , konstanter Massebelegung m_0 sowie der Länge L betrachtet. Die analytische Lösung für die Biegeeigenform folgt nach [2] zu:

$$\phi_i(\xi) = \sin(\lambda_i \xi)$$

Mit den Eigenwerten $\lambda_i = i \pi$ sowie obigen Beziehungen für die generalisierten Massen und Steifigkeiten ergeben

$$\text{sieh diese sowie die daraus über } f_i = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{\text{mod},i}}{m_{\text{mod},i}}} \text{ abgelei-}$$

teten Eigenfrequenzen für die ersten drei Eigenformen zu:

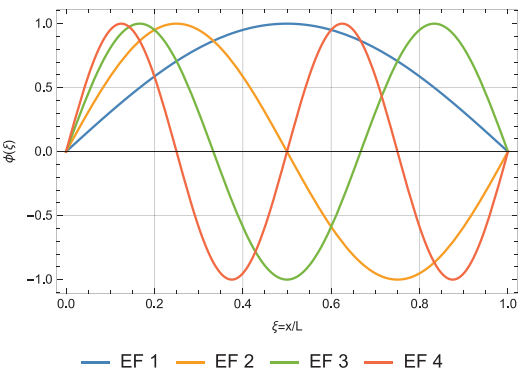


Bild 76. Eigenformen eines Einfeldträgers

$m_{\text{mod},i}$	$(L m_0)/2$	$(L m_0)/2$	$(L m_0)/2$
$k_{\text{mod},i}$	$(EI \pi^4)/(2 L^3)$	$(8 EI \pi^4)/L^3$	$(81 EI \pi^4)/(2 L^3)$
f_i	$\frac{1}{2} \frac{\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$	$2 \frac{\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$	$\frac{9}{2} \frac{\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$

Wie aus den Bildern 76 und 77 der ersten vier Eigenformen zu erkennen, wurde die Maximalamplitude auf den Wert 1 normiert. Als zweites Beispiel wird eine Kragstütze der Länge L mit ebenfalls konstanter Biegesteifigkeit EI und Massebelegung m_0 betrachtet. Auch dabei wurde die Maximalamplitude an der Kragarmspitze auf den Wert 1 normiert.

Mit den Eigenwerten $\lambda_i = \left(n - \frac{1}{2}\right) \pi$ sowie den Eigenschwingformen des Kragarms

$$\phi_i(\xi) = \sin h(\lambda_i) - \sin(\lambda_i) + \frac{\sin h(\lambda_i) + \sin(\lambda_i)}{\cos h(\lambda_i) + \cos(\lambda_i)} (\cos h(\lambda_i \xi) - \cos(\lambda_i \xi))$$

resultieren die modalen Kenngrößen zu:

$m_{\text{mod},i}$	$(L m_0)/4$	$(L m_0)/4$	$(L m_0)/4$
$k_{\text{mod},i}$	$(302.083 EI)/L^3$	$(118.384 EI)/L^3$	$(952.832 EI)/L^3$
f_i	$0,562 \frac{\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$	$3,5065 \frac{\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$	$9,82 \frac{\pi}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m_0}}$

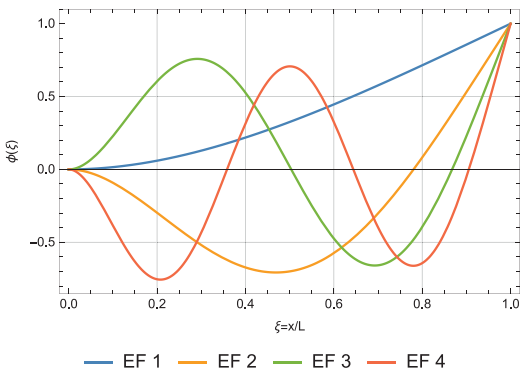


Bild 77. Eigenformen eines Kragarms

Wie aus den vorangegangenen Beispielen zu erkennen, kann die generalisierte Steifigkeit für die Grundschwingform näherungsweise auch über den reziproken Wert der zugehörigen Verformung infolge einer an dieser Stelle angreifenden Einheitslast ermittelt werden. Diese ergäben sich für den Kragarm zu $3 EI/L$ sowie für den gelenkig gelagerten Einfeldträger zu $48 EI/L^3$ (s. Standardliteratur des Bauwesens).

Interessieren die Schwingungszustände an einer bestimmten Stelle der Tragstruktur, so empfiehlt es sich, die Eigenvektoren an dieser Stelle auf den Wert 1 zu normieren. Dann entsprechen die aus dem kinetisch äquivalenten Einfreiheitsgradsystem abgeleiteten Schwingungsgrößen für die betrachtete Eigenschwingform unmittelbar den Werten der Gesamtkonstruktion. Weisen einzelne Eigenvektoren einen Schwingungsknoten, d. h. einen Nulldurchgang an der zu untersuchenden Stelle auf, so leisten diese keinen Beitrag zur Schwingungsantwort an dieser Stelle und können ohne Informationsverlust vernachlässigt werden.

Fortsetzung Beispiel 5

Als weiteres Beispiel seien die Schwingungsantwort eines einseitig eingespannten und auf der anderen Seite gelenkig gelagerten Einfeldträgers infolge einer harmonischen Anregung an der Stelle $x = 0,2 \cdot L$ diskutiert. Als Parameter werden eine Trägerlänge von 10 m, eine Biegesteifigkeit von $EI = 8,4 E6 \text{ Nm}^2$, eine Massebelegung $m = 1000 \text{ kg/m}$, eine harmonische Kraftanregung von 10 kN mit einer Anregungsfrequenz von 4,4 Hz sowie ein für alle Eigenformen konstantes logarithmisches Dämpfungsdekrement von $\Lambda = 0,1$ herangezogen. Um den Einfluss der gewählten Normierung auf die modalen Größen zu verdeutlichen, wird einmal eine Normierung der Maximalamplitude der Eigenform auf den Wert Eins betrachtet. Zusätzlich werden die Amplituden der Eigenvektoren an der hier interessierenden Stelle bei $x = 0,2 L$ zu eins gesetzt (Bilder 78, 79).

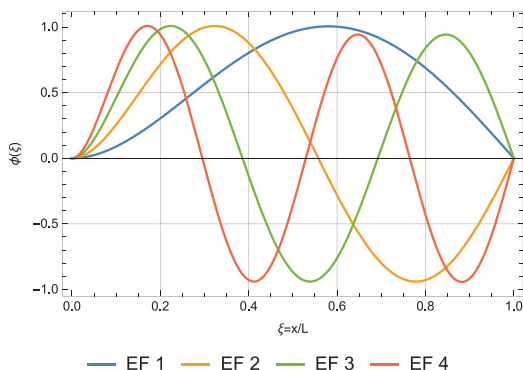


Bild 78. Normierung der Eigenvektoren auf deren Maximalamplitude

Explizit aufgeführt werden jeweils die modalen Massen, Steifigkeiten und Dämpfungswerte sowie die invarianten Eigenschwingfrequenzen für die ersten drei Eigenschwingformen.

	Normierung max. Amplitude		
m_{gen}	4440	4444	4444
k_{gen}	8,86 E5	9,32 E6	4,06 E7
d_{gen}	1996	6477	13515
f	2,25	7,29	15,2
	Normierung $x = 0,2 L$		
m_{gen}	48135	8661	4598
k_{gen}	9,6 E6	1,81 E7	4,2 E7
d_{gen}	21648	12624	13981
f	2,25	7,29	15,2

Die Ermittlung der Schwingungsantwort, welche natürlich im Ergebnis unabhängig von der gewählten Normierung sein muss, erfolgt über eine modale Superposition gemäß Gl. (61), während die modalen Einzellösungen gemäß Abschnitt 2 ermittelt werden.

Interessante Zusammenhänge offenbaren sich auch, wenn Gl. (61) einer Fourier-Transformation unterzogen und die Lösung anschließend in Komponentenschreibweise dargestellt wird

$$U(f) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\Phi_i \Phi_i^T}{j2\pi f - \lambda_i}}_{:=H(f)} P(f) = \sum_{i=1}^N \underbrace{\frac{\Phi_i}{j2\pi f - \lambda_i} \Phi_i^T P(f)}_{:=MPF} \quad (64)$$

Wird die Summe der dyadischen Produkte der Einheitsvektoren multipliziert mit der oben dargestellten Summe der Nennerterme zusammengefasst, so ergibt sich daraus die Frequenzgangmatrix $H(f)$. Diese wiederum multipliziert mit dem Fourier-transformierten Anregungsvektor $P(f)$ liefert die Schwingungsantwort im Frequenzraum. Wird hingegen ein Skalarprodukt mit

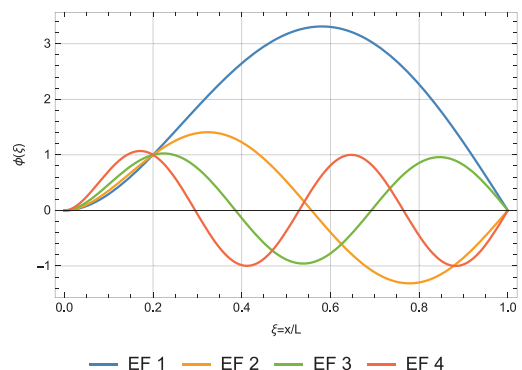


Bild 79. Normierung der Eigenvektoren auf den Wert Eins an der interessierenden Stelle $x = 0,2 L$

dem Anregungsvektor oder vielmehr der darin enthaltenen örtliche Verteilung der Kräfte mit den jeweiligen Eigenvektoren gebildet, so ergeben sich daraus die sogenannten modalen Partizipationsfaktoren (MPF). Diese erlauben zu einem gewissen Teil eine quantitative Aussage über den Beitrag der einzelnen Moden an der Gesamtantwort. Greifen äußere Lasten in Schwingungsknoten bestimmter Eigenformen an, so leisten diese keinen Beitrag zur Schwingungsantwort. Mindestens genauso wichtig wie die Größe modaler Partizipationsfaktoren ist jedoch der Verlauf der Frequenzgangfunktionen, welche analog der Vergrößerungsfunktion eines Einmassenschwingers die Bereiche starker dynamischer Überhöhungen charakterisieren.

3 Modellbildung und Idealisierung von Baukonstruktionen

Bei der Beschreibung dynamisch beanspruchter Systeme kommt der Modellbildung eine besondere Bedeutung zu. Zum einen ist die Frage nach dem geeigneten mechanischen Modell sowie zum anderen die Frage nach dessen mathematischer Beschreibung zu klären. Als Leitgedanke ist dabei: „So einfach wie möglich und so detailliert wie nötig“ zu empfehlen. Sind lediglich globale Schwingbewegungen einer Struktur von Interesse, so ist in jedem Fall die Beschreibung auf der Basis von Balkenelementen einer unnötig aufwendigen Abbildung durch Schalen- oder gar Volumenelemente vorzuziehen. Nicht nur, dass dadurch der erforderliche Rechenaufwand bedeutsam reduziert werden kann, auch die mit einer unnötig hohen Anzahl von Freiheitsgraden bei der numerischen Analyse verbundenen Unschärfen und nicht quantifizierbaren Fehler können dadurch vermieden werden.

3.1 Modale Größen ausgewählter Schwingungssysteme

Eine sowohl an der Reduzierung des Rechenaufwands als auch vor allem im Hinblick auf ein vertieftes Verständnis der Modellierung und Rechenabläufe orientierte Vorgehensweise stellt die modale Betrachtungsweise dar. Dabei wird die Schwingungsantwort als Superposition von Schwingbewegungen der jeweiligen Eigenvektoren aufgebaut (s. Abschnitt 2). Für eine überwiegende Anzahl an Konstruktionen genügt dabei die Betrachtung der Grundeigenform sowie ggf. weniger weiterer Eigenvektoren, um eine hinreichende Approximation der im Rahmen der Theorie exakten Lösung zu erhalten.

In Tabelle 3 sind die Eigenfrequenzen $f_j = X_j \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}$

sowie die Eigenformen $y_j(\xi)$ für die vier Grundsysteme von Stabstrukturen zusammengestellt. Diese exakten analytischen Lösungen für entlang der Stabachse konstante Biegesteifigkeit und Massebelegung können häufig auch als brauchbare Näherung für ähnliche Systeme herangezogen werden.

Wird die Normierung der Eigenformamplituden auf den Wert Eins bei $L/2$ für die beidseitig gelagerten Systeme sowie bei $x = L$ für das einseitig gelagerte Kragsystem vorgenommen, so ergeben sich für die Grundschwingformen die in Tabelle 4 aufgeführten generalisierten Größen.

Wird nunmehr die modale Dämpfung, beispielsweise

über $d_{\text{mod},l} = 2\Lambda_l \sqrt{\frac{k_{\text{mod},l} m_{\text{mod},l}}{4\pi^2 + \Lambda^2}}$ bestimmt, so liegen

sämtliche Informationen vor, um gemäß den Angaben in Abschnitt 2 die Schwingungsantwort in der Grundschwingform infolge einer Einzellast mit beliebigem

Tabelle 3. Modale Größen der Grundstabelemente (aus [2])

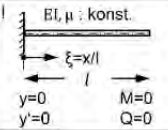
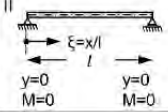
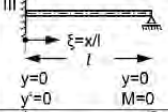
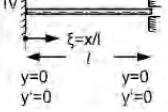
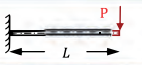
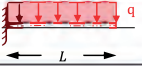
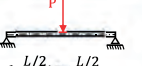
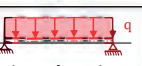
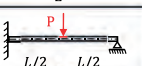
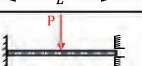
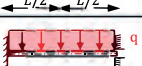
System	Frequenzgleichung	j	λ_j	X_j	y_j (Eigenform)	A_j	$\bar{j}$	A_j
I 	$\cos \lambda_j \cosh \lambda_j + 1 = 0$	1 2 3 n	1,875104 4,694091 7,854780 $(n - \frac{1}{2})\pi$	0,5595 3,5069 9,8194 $\frac{\pi}{2}(n - \frac{1}{2})^2$	$y_j = \sin \lambda_j \xi - \sinh \lambda_j \xi + A_j (\cosh \lambda_j \xi - \cos \lambda_j \xi)$	$A_j = \frac{\sinh \lambda_j + \sin \lambda_j}{\cosh \lambda_j + \cos \lambda_j}$	1 2 3 n	1,362220 0,981868 1,000776 1
II 	$\sin \lambda_j = 0$	1 2 3 n	π 2π 3π $n\pi$	1,5708 6,2832 14,1368 $\frac{\pi}{2}n^2$	$y_j = \sin \lambda_j \xi$			
III 	$\tanh \lambda_j - \tan \lambda_j = 0$	1 2 3 n	3,926802 7,068582 10,21018 $(n + \frac{1}{4})\pi$	2,4532 7,9522 16,5915 $\frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{4})^2$	$y_j = \sin \lambda_j \xi - \sinh \lambda_j \xi + A_j (\cosh \lambda_j \xi - \cos \lambda_j \xi)$	$A_j = \frac{\sinh \lambda_j + \sin \lambda_j}{\cosh \lambda_j + \cos \lambda_j}$	1 2 3 n	0,999223 0,999999 1 1
IV 	$\cosh \lambda_j \cos \lambda_j - 1 = 0$	1 2 3 n	4,730041 7,853205 10,99561 $(n + \frac{1}{2})\pi$	3,5608 9,8155 19,2424 $\frac{\pi}{2}(n + \frac{1}{2})^2$	$y_j = \sin \lambda_j \xi - \sinh \lambda_j \xi + A_j (\cosh \lambda_j \xi - \cos \lambda_j \xi)$	$A_j = \frac{\sinh \lambda_j + \sin \lambda_j}{\cosh \lambda_j + \cos \lambda_j}$	1 2 3 n	1,017809 0,999233 1 1

Tabelle 4. Generalisierte Größen für die Grundswingform

System	Normierung	Generalisierte Last	Generalisierte Masse	Generalisierte Steifigkeit
	$x=L$	$1.0 P$	$0.24 mL$	$\frac{3EI}{L^3}$
	$x=L$	$0.383 qL$	$0.24 mL$	$\frac{3EI}{L^3}$
	$x=L/2$	$1.0 P$	$0.5 mL$	$\frac{48.7 EI}{L^3}$
	$x=L/2$	$0.637 qL$	$0.5 mL$	$\frac{48.7 EI}{L^3}$
	$x=L/2$	$1.0 P$	$0.479 mL$	$\frac{113.9 EI}{L^3}$
	$x=L/2$	$0.595 qL$	$0.479 mL$	$\frac{113.9 EI}{L^3}$
	$x=L/2$	$1.0 P$	$0.398 mL$	$\frac{193.4 EI}{L^3}$
	$x=L/2$	$0.525 qL$	$0.398 mL$	$\frac{193.4 EI}{L^3}$

zeitlichen Verlauf an der Stelle der Maximalamplitude der ersten Eigenform zu ermitteln.

3.2 Zum Ansatz der Dämpfung in baudynamischen Berechnungen

Eine möglichst wirklichkeitsnahe Berücksichtigung der Dämpfungseigenschaften einer Baukonstruktion stellt durchaus keine triviale Angelegenheit dar. Dies trifft sowohl für die Wahl der mathematischen Beschreibung als auch für das unabhängig davon festzulegende Dissipationsvermögen zu. Im Folgenden wird ein kurzer Überblick über gängige Dämpfungsmodelle sowie deren mathematische Beschreibung gegeben.

3.2.1 Geschwindigkeitsproportionale Dämpfung

Der vorwiegend aus mathematischen Gründen gebräuchlichste Dämpfungsansatz basiert auf der Annahme einer viskosen, d. h. geschwindigkeitsproportionalen Dämpfungskraft $F_d(t)$.

$$m\ddot{u}(t) + \underbrace{d\dot{u}(t)}_{F_d(t)} + ku(t) = 0 \quad (65)$$

Mit dem unter Abschnitt 2.1 erläuterten Exponentialansatz $u(t) = \hat{u} \cdot e^{\lambda t}$ folgen die Eigenwerte zu

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega_D \sqrt{1 - \left(\frac{d}{2m}\right)^2} = \delta \pm i\omega_D \quad (66)$$

Der Realteil $\delta = d/2m$ beschreibt dabei den exponentiellen Abfall der Schwingungsamplituden. Die Dämpf-

fungskraft ist in Phase mit der Schwinggeschwindigkeit und für geringe Dämpfungswerte in etwa proportional zur Eigenkreisfrequenz ω_D sowie zur Auslenkung u . Wie ebenfalls bereits erläutert, ist die gedämpfte Eigenfrequenz für positive, d. h. energiedissipierende Systemdämpfung stets geringer als die korrespondierende Frequenz der ungedämpften Konstruktion, was jedoch für baupraktisch übliche Dämpfungswerte i. d. R. vernachlässigt werden kann.

Einen Sonderfall der viskosen Dämpfung beschreibt die Proportionalitäts- oder Rayleigh-Dämpfung, bei welcher die geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskonstante zu

$$d = \alpha m + \beta k \quad (67)$$

bestimmt wird. Die Rayleigh-Dämpfung ist für Mehrfreiheitsgradsysteme auch der einzige Dämpfungsansatz, für welchen die gekoppelten Differenzialgleichungen über eine Modaltransformation auf der Basis der Eigenvektoren des zugeordneten konservativen, d. h. ungedämpften Systems entkoppelt werden können. Für jede beliebige anders aufgebaute Dämpfungsmatrix sind dafür die im Allgemeinen komplexen Eigenvektoren zugrunde zu legen. Der Zusammenhang zwischen α und β und dem Dämpfungsgrad der betrachteten Eigenform folgt zu:

$$D_n = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta}{2}\omega_n = \frac{d_n}{d_{n, \text{crit}}} \quad (68)$$

Mit einem Paar Rayleigh-Koeffizienten α und β ergibt sich also im Allgemeinen für jede Eigenkreisfrequenz ω_n ein anderer Dämpfungsgrad.

In der Regel sind α und β nicht bekannt, sie lassen sich auch nicht direkt aus Messungen ermitteln. Indirekt können sie jedoch aus dem Dämpfungsgrad interessierender Eigenfrequenzen bestimmt werden. Dabei ist für eine reine α -Dämpfung der Dämpfungsgrad D_n proportional zum Kehrwert der Frequenz. Dagegen wächst der Dämpfungsgrad D_n für eine reine β -Dämpfung linear mit der Schwingfrequenz an.

Der Term ω_m in Gl. (67) kann physikalisch als Dämpfung einer schwingenden Struktur in einem umgebenden Medium aufgefasst werden und ist im Sinne einer äußeren Dämpfung zu verstehen. Diese per Definition massenproportionale Dämpfung wirkt sich besonders bei geringen Eigenfrequenzen aus. Weil an die Massenmatrix gekoppelt, werden auch Starrkörperbewegungen bedämpft.

Der Term βk kann als Materialdämpfung interpretiert werden, da er von elastischen Verformungen des Systems abhängig ist. Diese steifigkeitsproportionale Dämpfung wirkt besonders auf die höheren Eigenfrequenzen.

Zusammenhang und frequenzabhängige Summe aus α - und β -Dämpfung sind in Bild 80 dargestellt, wobei die Festlegung für $\omega_1 = 10$ rad/s und $\omega_2 = 25$ rad/s erfolgte. Aus den Schnittpunkten der horizontalen Linie mit der Summenlinie wird deutlich, dass bei Vorgabe eines Dämpfungsgrads dessen exakte Realisierung mit dem Modell der Rayleigh-Dämpfung nur für zwei Eigenfrequenzen möglich ist. Die Dämpfung in allen anderen Eigenformen liegt entweder darunter oder darüber. Die Kurvenverläufe verdeutlichen auch, dass der α -Anteil die Eigenformen niedriger Frequenzen stark dämpft, wohingegen sich der β -Term reduzierend auf Eigenformen der hohen Frequenzen auswirkt. Ist der Abstand zwischen den Frequenzen f_1 und f_2 nicht zu groß, so ändert sich wegen des flachen Kurvenverlaufs die Dämpfung in diesem Bereich nur wenig, sodass für den dazwischen liegenden Bereich näherungsweise von

einer konstanten Dämpfung ausgegangen werden kann.

Soll nunmehr in einem Frequenzbereich zwischen f_1 und f_2 ein annähernd konstanter Dämpfungsgrad erzwungen werden, berechnen sich die Rayleigh-Koeffizienten α und β mit $\omega_1 = 2\pi f_1$ wie folgt:

$$\beta = \frac{2D}{\omega_1 + \omega_2} = \frac{D}{\pi(f_1 + f_2)} \quad (69)$$

$$\alpha = \omega_1 \omega_2 \beta = 4\pi^2 f_1 f_2 \beta \quad (70)$$

Während für obige Parameter, d. h. für eine Fixierung des gewünschten Dämpfungsgrads auf Kreisfrequenzen von 10 rad/s und 25 rad/s für den gesamten dazwischen liegenden Frequenzbereich eine zufriedenstellende Annäherung mit einer maximalen Unterschreitung von ca. 10% möglich ist, wird der Fehler mit zunehmendem Abstand der Fixpunkte immer größer bis hin zu einer Unterschreitung von 50%. Dies wird in Bild 81 für die Frequenzen von $\omega_1 = 10$ rad/s und $\omega_2 = 250$ rad/s verdeutlicht (vgl. auch Ausführungen zu Beispiel 7).

Ein zentrales Merkmal der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung ist die grundsätzliche Frequenzabhängigkeit der Dämpfungskraft. Diese, vielen empirischen Beobachtungen zuwider laufende Tatsache kann exakt nur durch eine modale Entkopplung sowie die anschließende manuelle Festlegung einer über alle Frequenzbereiche konstanten Dämpfung umgangen werden. Das wiederum ist jedoch nur möglich, sofern das gekoppelte Differenzialgleichungssystem durch reelle Eigenvektoren entkoppelt werden kann, was ausschließlich für ein proportional gedämpftes System der Fall ist. In der Praxis wird deshalb häufig folgender Weg beschritten. Die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren werden unter Vernachlässigung jeglicher Dämpfung bestimmt. Im Anschluss werden dann die n entkoppelten Bewegungsdifferenzialgleichungen sukzessive gelöst, wobei jedem EFG-System eine beliebige, z. B. frequenzunabhängige, Dämpfung zugewiesen wird. An dieser Stelle wird erneut darauf hingewiesen, dass diese Vorgehensweise für

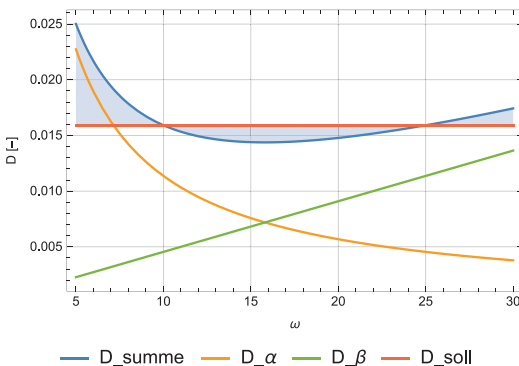


Bild 80. Frequenzabhängigkeit der Rayleigh-Dämpfung für $\omega_1 = 10$ rad/s und $\omega_2 = 25$ rad/s

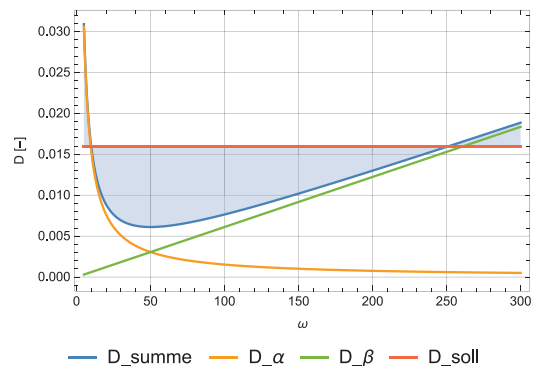


Bild 81. Frequenzabhängigkeit der Rayleigh-Dämpfung für $\omega_1 = 10$ rad/s und $\omega_2 = 250$ rad/s

Systeme mit diskreten Dämpfungselementen nur eine Näherung darstellen kann. Da die in Ansatz gebrachten Dämpfungseigenschaften jedoch in aller Regel ohnehin nur auf zum Teil sehr groben Schätzungen oder Erfahrungswerten beruhen, ist diese Vorgehensweise durchaus vertretbar sowie oftmals alternativlos (Tabelle 5).

3.2.2 Strukturelle Dämpfung

Für den Fall eines strukturellen Dämpfungsansatzes, welcher per se eine von der Frequenz unabhängige Dämpfungskraft beschreibt, wird das reale Materialverhalten nicht durch getrennte Feder- und geschwindigkeitsproportionale Dämpfungselemente, sondern durch eine komplexe Feder $\hat{k} = k(1 \pm i\eta)$ bzw. analog durch einen komplexen E-Modul $\hat{E} = E(1 \pm i\eta)$ angenähert, wobei mit η der sogenannte Verlustfaktor eingeführt wird. Analog zur viskosen Dämpfung führt auch für die daraus abzuleitende Differenzialgleichung

$$m\ddot{u}(t) + k(1 \pm i\eta)u(t) = 0 \quad (71)$$

ein Exponentialansatz zum Ziel und schließlich auf die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = \delta \pm i\omega_D \quad (72)$$

Wobei der Realteil wiederum der gedämpften Eigenfrequenz

$$\omega_D = \omega_0 \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \eta^2}}{2}} \quad (73)$$

entspricht, die für Systeme mit positiver Dämpfung stets größer als die zugehörige ungedämpfte Schwingfrequenz ausfällt. Der Imaginärteil des Eigenwerts repräsentiert das Dämpfungsverhalten und folgt zu

$$\delta = \omega_0 \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 + \eta^2}}{2}} \quad (74)$$

Auffallend ist dabei, dass die daraus resultierende Dämpfungskraft unabhängig vom Dämpfungsgrad stets in Phase mit der Geschwindigkeit verläuft und anders als im Fall der viskosen Dämpfung nicht von der Schwingfrequenz abhängt. Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass der strukturelle Dämpfungsansatz streng genommen ausschließlich für stationäre Schwingungszustände definiert ist.

3.3 Bestimmung von Ersatzfedersteifigkeiten

Häufig können Baukonstruktionen im Hinblick auf die Beurteilung deren Grundswingformen als Systeme mit starren Massekörpern und masselosen Aussteifungskonstruktionen idealisiert werden. Die Aussteifungskonstruktionen können dabei aus biegeweichen Stabsystemen oder dehnweichen Verbandskonstruktionen bestehen.

In Tabelle 6 sind Hilfsmittel zur Bestimmung der wirklichen Ersatzsteifigkeiten ausgewählter Aussteifungssysteme zusammengestellt, die eine praktikable und

schnelle Abschätzung der Grundeigenfrequenzen und Schwingungserscheinungen ermöglichen.

Für beliebige Stabsysteme können die interessierenden Ersatzfedersteifigkeiten an den betrachteten Stellen z. B. auch über das Kraftgrößenverfahren ermittelt werden (vgl. z. B. [17]).

3.4 Massenträgheitsmomente

Kann die kinetische Wirkung der Masse nicht mehr als in einem Punkt konzentriert angenommen werden, so sind neben den translatorischen auch die rotatorischen Massenträgheitskräfte von Bedeutung. Als Beispiel seien an dieser Stelle Konstruktionen mit einer Neigung zu Flattererscheinungen (vgl. Abschnitt 5.3.4) genannt, bei welchen neben den Biege- auch die Torsionsschwingungen eine zentrale Rolle spielen. In Tabelle 7 sind Formeln zur Bestimmung der Massenmomente zweiter Ordnung für gebräuchliche Körper aufgeführt.

3.5 Eigenfrequenzen und Eigenformen ausgewählter Schwingungssysteme

Eine näherungsweise Abschätzung der ersten Eigenfrequenz von Biegebalken kann auf der Basis des sogenannten Rayleigh-Quotienten vorgenommen werden. Dieser folgt aus der Energiebilanz zwischen kinetischer und potenzieller Energie, d. h. unter Vernachlässigung jeglicher Dämpfungseigenschaften zu

$$\omega_0^2 = \frac{\int_0^L EI(x) W''^2(x) dx}{\int_0^L \mu(x) W^2(x) dx} \quad (75)$$

bzw. für $EI(x)$ und $\mu(x) = \text{const.}$

Der Rayleigh-Quotient liefert für exakte Eigenschwingformen auch die exakten Eigenfrequenzen. Sind diese nicht bekannt, so können auch entsprechende Näherungen z. B. Biegelinien infolge von Gleichstreckenlasten etc. zugrunde gelegt werden, wobei auch nur Näherungen für die Eigenfrequenzen gefunden werden, die stets höher liegen als die tatsächlichen.

Daraus lässt sich auch die Formel von *Morleigh*, die für Biegebalken unter Eigengewichtsbelastung $p(x) = g \cdot \mu(x)$ gültig ist, ableiten

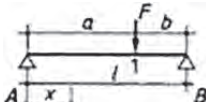
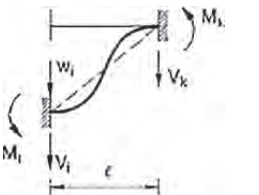
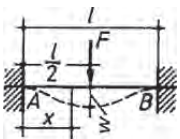
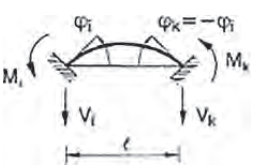
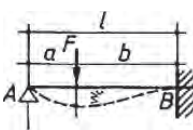
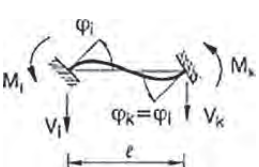
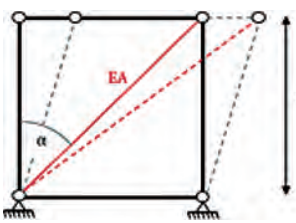
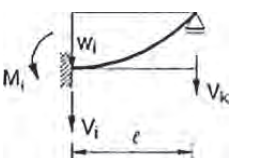
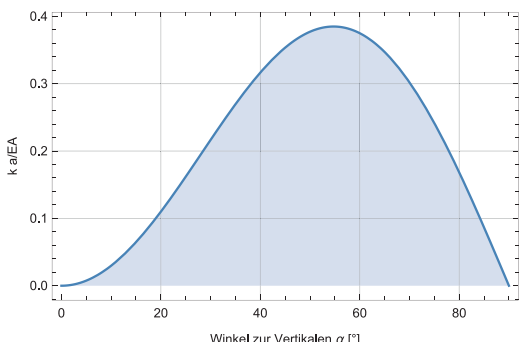
$$\omega_0^2 = g \frac{\int_0^L \mu(x) W(x) dx}{\int_0^L \mu(x) W^2(x) dx} \quad (76)$$

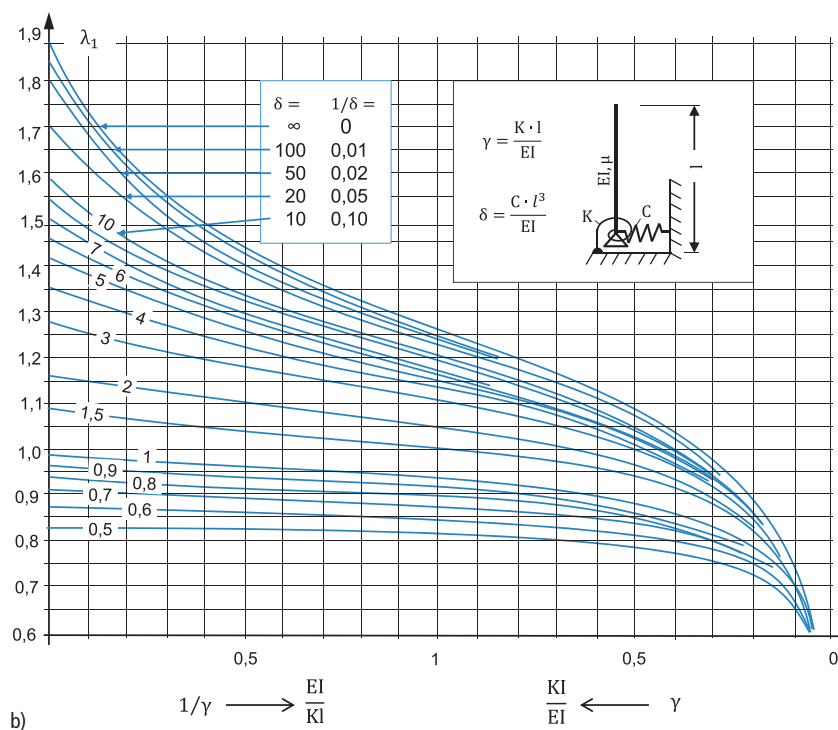
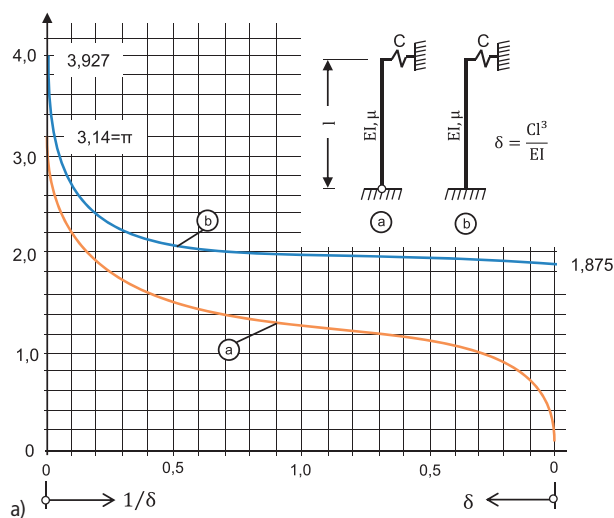
Für konstante Steifigkeitsverhältnisse und Massenbelegung kann z. B. für einen gelenkig gelagerten Einfeldträger die erste Eigenfrequenz aus der maximalen Durchbiegung infolge Eigengewichtsbelastung zu $\omega^2 = g/w_{\max}$ bestimmt werden (Bilder 82, 83).

Tabelle 5. Erfahrungswerte für Dämpfungseigenschaften ausgewählter Baukonstruktionen (aus [2])

$\Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3$									
Λ_1 : Dämpfung im Baustoff; (Λ : logarithmisches Dekrement)									
Λ_2 : Dämpfung in Bauteilen und Verbindungsmitteln ;									
Λ_3 : Dämpfung durch Lagerung und Baugrund (nicht für Maschinengründungen u.ä.)									
Lineare Schwingungen im Nutzzustand (nicht für extreme, außergewöhnliche Einwirkungen)									
Umrechnungen: Dämpfungsgrad : $\xi = \Lambda / 2\pi$; Verlustfaktor : $\eta_v = \Lambda / \pi$									
Λ_1	Stahl: ferritisch	0,005	0,008	0,012	Stahlbeton: Zust. I	0,025	0,030	0,040	
	: austenitisch	0,008	0,013	0,018	: Zust. II	0,035	0,045	0,055	
	Aluminium – Legierung	0,010	0,015	0,025	Spannbeton	0,020	0,025	0,030	
	Bauholz: Laubholz	0,030	0,035	0,040	Leichtbeton	0,035	0,045	0,055	
	: Nadelholz	0,040	0,045	0,050	Mauerwerk: Naturstein	0,055	0,065	0,080	
	Brettschichtholz	0,025	0,030	0,035	: Ziegel, Betonstein	0,045	0,050	0,060	
	Kunststoff GFK	0,035	0,040	0,045	: Klinker	0,040	0,045	0,055	
Λ_2	Hochbau (Träger, Hallen, Hochhäuser) in Stahl				Fußweg- u. Straßenbrücken in Stahl				
	ohne Ausbau : W, SLP, GV	0,012	0,015	0,018	Fahrbahn: Stahl u. Asphalt	0,020	0,025	0,030	
	ohne Ausbau : SL	0,015	0,020	0,025	Fahrbahn: Beton, Stahlverbund	0,025	0,035	0,040	
	mit Ausbau	0,035	0,040	0,045	Fahrbahn: Holz	0,030	0,040	0,050	
	Stahlschornsteine ohne Abspannung				Eisenbahnbrücken in Stahl				
	ohne Ausbau : W, SLP, GV	0,002	0,003	0,005	offene Bauweise	0,030	0,035	0,050	
	ohne Ausbau : SL	0,005	0,007	0,010	geschl. Bauweise ohne Schotterbett	0,025	0,030	0,050	
	mit Rauchrohr u. Isolierung	0,012	0,015	0,020	geschl. Bauweise mit Schotterbett	0,040	0,050	0,070	
	mit Ausmauerung	0,030	0,040	0,065	Fußweg- u. Rohrleitungsbrücken				
	Stählerne Turm- und Antennentragwerke				als Hängesteg	0,010	0,015	0,020	
	ohne Ausbau : W, SLP, GV	0,007	0,010	0,015	Schrägsellbrücken	0,030	0,040	0,050	
	mit Einbauten (Podeste u.ä.)	0,012	0,015	0,020	Hängebrücken	0,025	0,030	0,035	
	Abgespannte Maste	0,035	0,040	0,060	Zuschlag in allen Fällen:				
u. Schornsteine				Brückenträger als Fachwerk : Faktor 1,2					
				Torsionsschwingungen : Faktor 1,3					
Für vergleichbare Konstruktionen in Aluminium können die Werte für Stahl übernommen werden.									
Λ_3	Hölzerne Konstruktionen des Hoch- und Brückbaues :								
	Bauten aus Bauholz mit Dübel-, Bolzen- und Nagelverbindungen					0,035	0,040	0,050	
	Leimbauweise (Brettschichtträger und -rahmen)					0,015	0,020	0,025	
	Hochbau (Träger, Hallen, Hochhäuser) in Stahlbeton				Schornsteine und turmartige Bauwerke in Stahlbeton				
	Decken, Träger, Tribünen	0,035	0,040	0,050	ohne Ausbau	0,010	0,015	0,020	
	Scheiben- u. Kastenbauweise				mit Ausbau	0,015	0,020	0,030	
	ohne Ausbau	0,020	0,030	0,040	Brücken in Stahlbetonbauweise				
	mit Ausbau	0,030	0,040	0,060	Fußweg- u. Straßenbrücken	0,015	0,020	0,025	
	Rahmenbauweise				Eisenbahnbrücken				
	ohne Ausbau	0,025	0,035	0,045	ohne Schotterbett	0,020	0,025	0,030	
	mit Ausbau	0,035	0,045	0,055	mit Schotterbett	0,035	0,040	0,045	
	Vorstehende Werte gelten ebenfalls für Spannbeton- und Fertigbetonbauweisen sowie für Leichtbeton								
	Hochbauten in Mauerwerk, einschließlich Türme (Glockentürme)						0,030	0,035	0,040
Λ_3	Hochbau : Decken, Träger, Binder, Lagerung auf				Brückenbau : Lagerung der Hauptträger				
	Beton und Mauerwerk	0,004	0,005	0,006	Stählerne Gleitlager	0,012	0,015	0,018	
	Stützen und Rahmen				Rollenlager	0,004	0,005	0,006	
	mit Einspannung	0,008	0,010	0,012	Topf- u. Kolottenlager (PTFE)	0,008	0,010	0,012	
	mit Gelenken	0,004	0,005	0,006	Elastomer-Verformungs - Lager	0,010	0,015	0,025	
	Turmartige, frei auskragende Konstruktionen				Legende (Abkürzungen) :				
	auf Stahlkonstruktion	0,008	0,010	0,012	W : Schweißverbindung				
	auf Betonkonstruktion	0,004	0,005	0,006	SL : Scher-Lochleibungs-Schraubenverbindung				
	auf Fundamenten				SLP : Scher-Lochleibungs-Paßschraubenverbindung				
	auf Fels	0,004	0,005	0,006	GV : Gleitfeste vorgespannte Schraubenverbindung				
	auf Kies	0,006	0,008	0,010					
	auf Sand	0,008	0,010	0,012	Zust. I : Ungerissener Beton, Zust. II : Gerissener Beton				
	auf Pfahlrost	0,012	0,015	0,018					

Tabelle 6. Ersatzfedersteifigkeiten für ausgewählte Stabsysteme (aus [17])

Grundelement	Ersatzfedersteifigkeit	Grundelement	Ersatzfedersteifigkeit
	$N_i = -\frac{EA}{\ell} \cdot u_k$ $N_k = \frac{EA}{\ell} \cdot u_k$		$w_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{F}{EI} \cdot \frac{a^2 b^2}{l}$
	$M_i = \frac{2EI}{\ell} \cdot \varphi_k$ $M_k = \frac{4EI}{\ell} \cdot \varphi_k$ $V_i = -\frac{6EI}{\ell^2} \cdot \varphi_k$ $V_k = \frac{6EI}{\ell^2} \cdot \varphi_k$		$w_c = \frac{Fa^2 b^3}{12EI l^3} (3l + a)$
	$M_i = \frac{2EI}{\ell} \cdot \varphi_i$ $M_k = -\frac{2EI}{\ell} \cdot \varphi_i$ $V_i = 0$ $V_k = 0$		$w_c = \frac{Fa^2 b^3}{12EI l^3} (3l + a)$
	$M_i = \frac{6EI}{\ell} \cdot \varphi_i$ $M_k = \frac{6EI}{\ell} \cdot \varphi_i$ $V_i = -\frac{12EI}{\ell^2} \cdot \varphi_i$ $V_k = \frac{12EI}{\ell^2} \cdot \varphi_i$		$k_{hor} = \frac{EA}{H} \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)$ $k_{hor, 45^\circ} = \frac{EA}{H} 0,3536$
	$M_i = \frac{3EI}{\ell} \cdot \varphi_i$ $V_i = \frac{3EI}{\ell^2} \cdot \varphi_i$ $V_k = \frac{3EI}{\ell^2} \cdot \varphi_i$		



$$f_1 = \frac{\lambda_1^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\mu l^4}}$$

Bild 82. Ermittlung der Eigenschwingfrequenzen für ausgewählte Stabsysteme (aus [2])

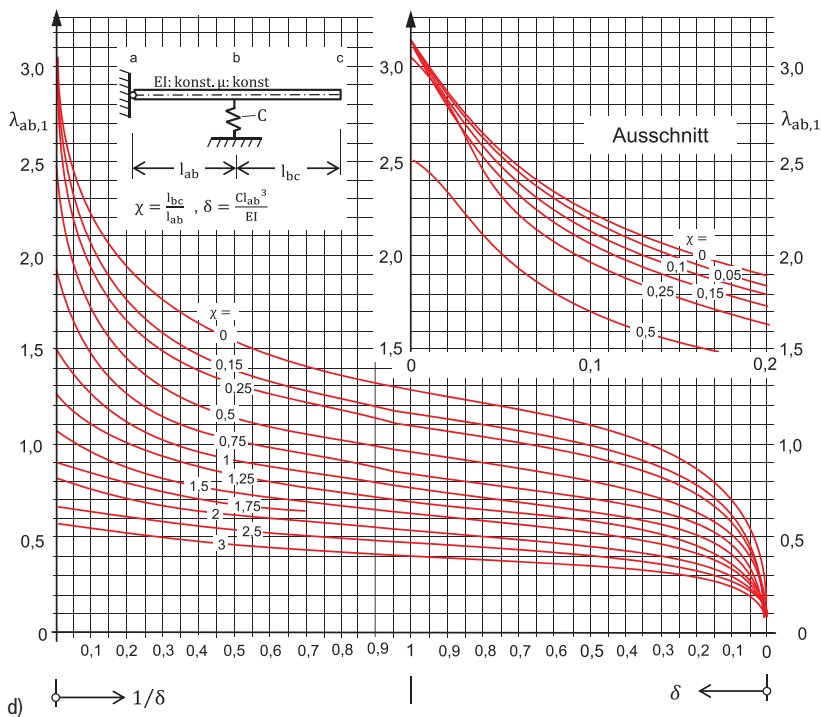
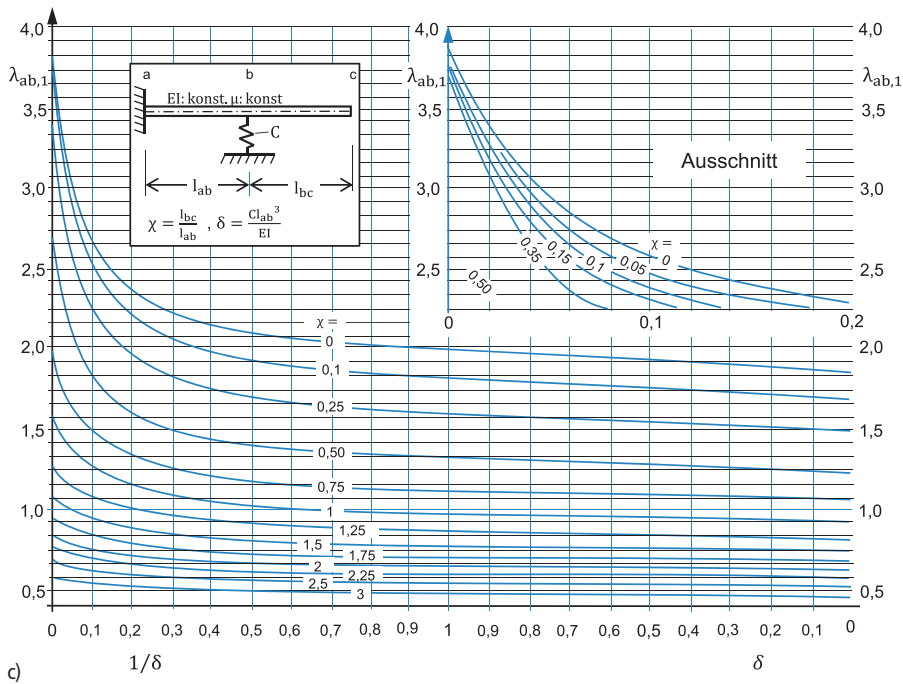
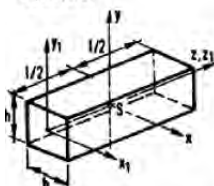
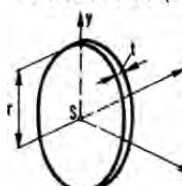
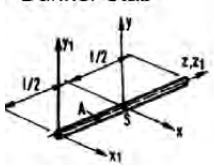
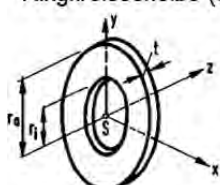
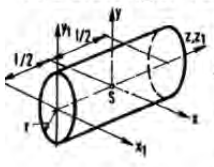
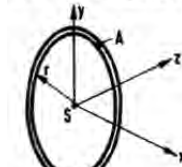
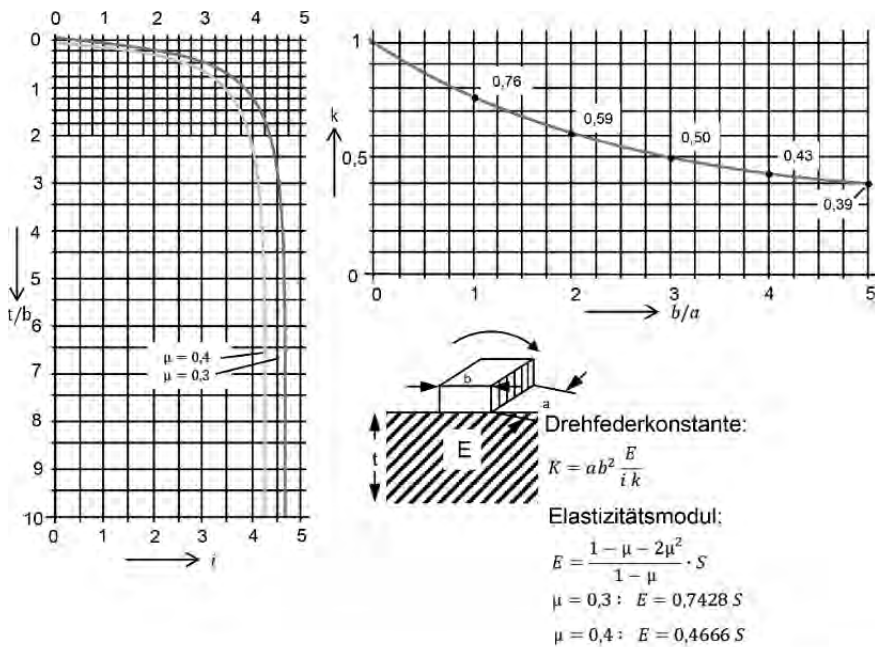


Bild 82. Ermittlung der Eigenschwingfrequenzen für ausgewählte Stabsysteme (aus [2])

Tabelle 7. Massenträgheitsmomente für ausgewählte Körper (aus [2])

Quader  $m = \rho b h l$ $J_{x_1 x_1} = \frac{1}{12} m h^2 + \frac{1}{3} m l^2$ $J_{y_1 y_1} = \frac{1}{12} m b^2 + \frac{1}{3} m l^2$ $J_{z_1 z_1} = J_{zz} = \frac{1}{12} m (b^2 + h^2)$ $J_{yy} = \frac{1}{12} m (b^2 + l^2)$ $J_{xx} = \frac{1}{12} m (h^2 + l^2)$	Kreisscheibe (dünnwandig) $t \ll r$  $m = \rho \pi r^2 t$ $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{4} m r^2$ $J_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$
Dünner Stab  $m = \rho A l$ $J_{x_1 x_1} = J_{y_1 y_1} = \frac{1}{3} m l^2$ $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{12} m l^2$	Ringkreisscheibe (dünnwandig) $t \ll r_a$  $m = \rho \pi t (r_a^2 - r_i^2)$ $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{4} m (r_a^2 - r_i^2)$ $J_{zz} = \frac{1}{2} m (r_a^2 - r_i^2)$
Kreisförmiger Vollzylinder  $m = \rho \pi r^2 l$ $J_{x_1 x_1} = J_{y_1 y_1} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{3} m l^2$ $J_{z_1 z_1} = J_{zz} = \frac{1}{2} m r^2$ $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{4} m r^2 + \frac{1}{12} m l^2$	Dünner Ringstab  $m = 2 \rho \pi r A$ $J_{xx} = J_{yy} = \frac{1}{2} m r^2$ $J_{zz} = m r^2$



	Bodenart	Lagerung	Steifzahl S [N/cm ²]	μ
nicht bindig	Fels		$10^7 - 10^5$	$\approx 0,3$
	Schotter scharfkantig		30 000 – 15 000	
	Kies	dicht	40 000 – 20 000	
		mittel	20 000 – 10 000	
		locker	10 000 – 5 000	
	Kiessand	mitteldicht	20 000 – 10 000	
	Sand, scharfkörnig	dicht	30 000 – 20 000	
		mittel	20 000 – 8 000	
		locker	8 000 – 4 000	
	Sand, rundkörnig	dicht	20 000 – 8 000	
bindig		mittel	10 000 – 5 000	$\approx 0,3$
		locker	5 000 – 1 000	
	Geschiebemergel	fest	10 000 – 1 000	
	Lehm	halbfest	5 000 – 500	
		weich	800 – 500	
	Ton	halbfest	2 000 – 500	
		steif	800 – 300	
		weich	300 – 150	
	Löß		2 000 – 1 000	$\approx 0,3$
	Schluff		2 000 – 300	

Bild 83. Ermittlung der Drehfedersteifigkeit für ein rechteckiges Fundament (aus [2])

4 Messen von Bewegungsgrößen

Ein zentraler Unterschied zwischen statisch und dynamisch beanspruchten Baukonstruktionen besteht darin, dass bei der Dimensionierung Letzterer eine Auslegung auf der sicheren Seite nicht ohne Weiteres möglich ist. Wie an vielen Stellen in diesem Beitrag aufgezeigt, bewirkt eine Veränderung von Masse, Steifigkeit oder Dämpfungsvermögen das dynamische Verhalten der gesamten Konstruktion. Insbesondere die Dämpfungseigenschaften von Baukonstruktionen lassen sich nur selten durch Rechenansätze und Erfahrung hinreichend genau vorhersagen, sodass i. d. R. auf In-situ-Messungen zurückgegriffen werden muss.

4.1 Auswertung diskreter Zeitschriebe

Im Falle von Messungen interessieren neben den in Abschnitt 2.2.5 aufgezeigten Zusammenhängen für kontinuierliche Prozesse häufig auch die mit einer oftmals notwendigen Digitalisierung bzw. Diskretisierung verbundenen Besonderheiten. Naturgemäß handelt es sich bei den nachfolgend dargestellten Werten nur um Schätzwerte im Hinblick auf die Charakteristika der zugrunde liegenden Grundgesamtheit (s. hierzu auch [1]). Es liege ein Messschrieb der Messdauer T [s] in der Form von N Messwerten $\bar{x}_i$ sowie der daraus resultierenden Intervalllänge $\Delta t = T/N$ vor. Der empirische (Zeit-)Mittelwert folgt zu

$$\overline{x(t)} = \mu_x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \bar{x}_i \quad (77)$$

Werden im Folgenden ausschließlich die daraus resultierenden mittelwertbefreiten Signale in der Form $x_i = \bar{x}_i - \mu_x$ betrachtet, so entspricht der quadratische Mittelwert gleich der Varianz des Prozesses:

$$\overline{x^2(t)} = \sigma_x^2 = \text{var}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \quad (78)$$

Bei der Ermittlung von Korrelationsfunktionen aus diskretisierten Messschrieben muss beachtet werden, dass aufgrund der endlichen Messschrieblänge auch die korrelierbare Werteanzahl mit fortschreitender Korrelationsweite abnimmt, sofern die Messschriebe nicht künstlich periodisch fortgesetzt werden. Auch im Falle einer periodischen Fortsetzung der Messschriebe werden die daraus ermittelten Korrelationswerte mit zunehmender Korrelationsweite unbrauchbar, da sich die Selbsterhaltungsneigung der Messdaten verstärkt. Aus diesem Grund sind verwertbare Ergebnisse für aus diskreten Signalen ermittelten Korrelationsfunktionen nur für einen Bereich $\tau_{\max} < 0,1 \cdot T$ zu erwarten.

$$R_{xx,k} = R_{xx}(k\Delta t) = \frac{1}{N-k} \sum_{i=1}^{N-k} x_i x_{i+k} \quad (79)$$

($k = 0, 1, 2, \dots, m$)

Die Ermittlung der spektralen Leistungsdichtefunktion kann entweder über eine diskrete Fourier-Transforma-

tion aus der soeben gefundenen Korrelationsfunktion ermittelt werden. In der Praxis erfolgt die Ermittlung jedoch fast ausschließlich unmittelbar aus der diskreten Fourier-Transformierten des eigentlichen Signals zu

$$S_{xx}(k \cdot f) = T \cdot |X(k \cdot f) \overline{X(k \cdot f)}| \quad (80)$$

Liegt ein Messschrieb mit insgesamt N Messwerten vor, so kann die diskrete Fourier-Transformierte zu

$$X\left(\frac{n}{N\Delta T}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k\Delta T) e^{-j2\pi nk/N} \quad (81)$$

ermittelt werden, wobei mit ΔT die Zeitschrittweite der Abtastung bezeichnet wurde.

4.2 Messtechnik und praktische Hinweise

Zur Erfassung der Schwingbewegungen einer Konstruktion steht eine Vielzahl an Sensortypen auf der Basis unterschiedlichster Messprinzipien zur Verfügung, die eine Messung des Schwingwegs, der Schwinggeschwindigkeit oder der Beschleunigung erlauben. Bei der Auswahl der Sensoren muss neben der Applizierbarkeit sowie den Einsatzbedingungen insbesondere auch auf den erfassbaren Frequenzbereich geachtet werden. In Tabelle 8 erfolgt eine Gegenüberstellung der wesentlichen Merkmale exemplarisch ausgewählter Messsensoren. Dabei wird weniger auf die Vor- und Nachteile der jeweiligen Messprinzipien als vielmehr auf die Besonderheiten bei der praktischen Handhabung eingegangen.

Unabhängig vom Messprinzip erfassen Wegsensoren die Schwingbewegungen der zu untersuchenden Konstruktion relativ zu einem Fixpunkt. Dieser Fixpunkt kann somit nicht Bestandteil der untersuchten Bauteilkomponenten sein und ist oftmals nur durch aufwendige Hilfskonstruktionen zu realisieren. Dabei ist auf die möglicherweise das Messergebnis beeinflussende Schwingungsreaktion dieser Fixkonstruktionen zu achten.

Aus diesem Grund werden zur Beurteilung von Baukonstruktionen häufig Beschleunigungssensoren eingesetzt. Diese erlauben eine Messung der absoluten Schwingbeschleunigung im Bereich der Applikationsstelle. Sofern der Frequenzbereich des Sensors auf das Schwingungsverhalten der zu untersuchenden Konstruktion abgestimmt ist, sind diese hervorragend zur Erfassung der Eigenfrequenzen geeignet. Vorsicht ist jedoch immer dann geboten, wenn aus gemessenen Beschleunigungsverläufen durch eine zweifache Integration auf den Schwingweg geschlossen werden soll. Grund dafür ist, dass jedes Messsignal mit Messfehlern z. B. in der Form von Messrauschen behaftet ist und sich diese Messfehler beim Integrieren fortpflanzen. Auch was den Applikationsort und die Art und Weise der Sensorbefestigung angeht, muss der zu untersuchende Frequenzbereich mit in Betracht gezogen werden. Als Beispiel für mögliche Fehlinterpretationen seien die Beschleunigungsverläufe der Vorderachse eines instrumentierten Fahrzeugs diskutiert.

Tabelle 8. Gegenüberstellung unterschiedlicher Messsensoren

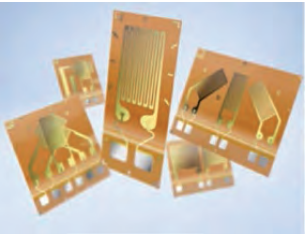
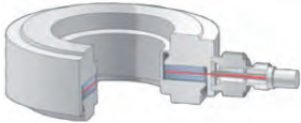
Sensortyp (Messgröße)	Vorteile	Nachteile
Beschleunigungssensor (a) 	– leicht applizierbar – kein Fixpunkt notwendig – für unterschiedliche Beschleunigungsbereiche verfügbar – gut zur Frequenzbestimmung geeignet – robuste Ausführung auch für Dauereinsatz im Außenbereich	– Schwingungsamplitude nur über Integration bestimmbar
Laser-Sensor (u) 	– keine Applikation am Objekt notwendig – sehr gute Frequenzauflösung – hohe Genauigkeit – große Messwege realisierbar	– externer Fixpunkt erforderlich – teuer – aufwendige Schutzmaßnahmen bei Dauereinsatz im Außenbereich
Wegsensoren (u) 	– oft günstiger als Laser-Sensoren – robuste Bauweisen auch für den Dauereinsatz im Außenbereich verfügbar	– Applikation am Objekt und externer Fixpunkt erforderlich – bei mechanischen Tastern Begrenzung des erfassbaren Frequenzbereichs sowie oftmals geringe Bewegungsmöglichkeit quer zur Messrichtung – Messweg oftmals begrenzt
DMS (Verzerrung, u) 	– liefert unmittelbar Beanspruchungen der Struktur – gut zur Frequenzbestimmung geeignet	– metallische Oberfläche erforderlich – aufwendige Schutzmaßnahmen bei Messungen im Außenbereich – Entfernen von Beschichtungen notwendig – Schwingwege nur über ggf. fehlerbehaftetes post-processing mit Strukturinformationen ermittelbar
Seilzugsensoren (u) 	– günstig – robuste Ausbildung auch für Außenbedingungen	– nur für niedrigen Frequenzbereich geeignet – Applikation am Objekt und externer Fixpunkt erforderlich

Tabelle 8. Gegenüberstellung unterschiedlicher Messsensoren (Fortsetzung)

Sensortyp (Messgröße)	Vorteile	Nachteile
Kraftaufnehmer – DMS-basiert 	– hohe Genauigkeit – stabile Messsignale, keine Sensordrift	– Messauflösung abhängig von Maximalkraft – sehr große Sensorabmessungen erforderlich
Kraftmesssensoren – Piezo-basiert 	– Messauflösung unabhängig von der Maximalkraft – kleine Baugrößen bei hoher Steifigkeit möglich	– neigt zu Sensordrift – weniger geeignet für längere Messsignale

Wie aus dem Beschleunigungszeitverlauf sowie dem zugeordneten Frequenzspektrum eindeutig zu erkennen, sind den interessierenden globalen Schwingbewegungen der Fahrzeugachse, die sich erfahrungsgemäß in einem Frequenzbereich kleiner als 15 Hz abspielen, dominante höherfrequente Schwingungen überlagert (Bilder 84, 85). Diese resultieren aus resonanzähnlichen Schwingbewegungen der Lenkkonstruktion, auf welcher die Beschleunigungssensoren appliziert wurden. Erst durch die Anwendung entsprechender Filter wird eine Bewertung der eigentlich interessierenden globalen Vertikalschwingbewegungen der Vorderachse möglich. Abschließend sollen an dieser Stelle noch Anmerkungen zur Festlegung der Abtastfrequenz aufgeführt werden. Jede Digitalisierung eines analogen Messsignals kommt einer zeitlichen Diskretisierung, d. h. Abtastung gleich. Dabei können auch für idealisierte Verhältnisse ausschließlich Frequenzen bis maximal zur halben Abtastfrequenz korrekt erfasst werden. Sind in dem betrachteten Signal, d. h. in der zu untersuchenden Schwingbewegung oder den stets enthaltenen Messfeh-

lern, höhere Frequenzen enthalten, so führt dies unweigerlich zu Verfälschungen des ermittelten Amplitudenspektrums.

Auch die der Frequenzanalyse zugrunde gelegte Messschrieblänge ist von Bedeutung. Zum einen wird durch die Betrachtung eines längeren Zeitabschnitts die erreichbare Frequenzauflösung erhöht. Dabei sei jedoch angemerkt, dass die oftmals in der Literatur zu findende Empfehlung, wonach das Auffüllen eines transienten Messsignals mit „Nullen“ zur Verlängerung der Messschrieblänge physikalisch gesehen unsinnig ist, da dadurch keine zusätzlichen Informationen generiert werden können. Zwar kann dadurch die Frequenzauflösung erhöht, d. h. der Abstand der ermittelten Amplitudenwerte auf der Frequenzachse verringert werden, jedoch ist dieselbe Verdichtung der Amplitudenwerte durch eine Interpolation auf der Basis der Fourier-Transformierten der Fensterfunktion zu erzielen. Zum anderen spielt neben der Abtastrate die Länge der Messaufzeichnung auch eine entscheidende Rolle im Hinblick auf mögliche Verfälschungen des wahren Fre-

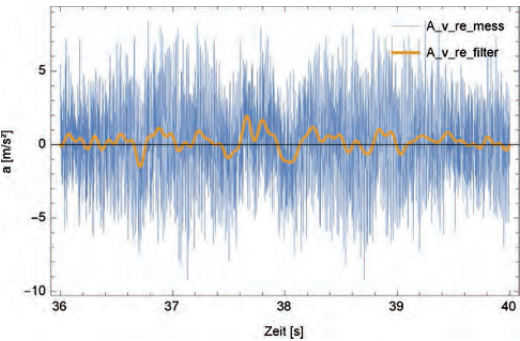


Bild 84. Gefilterte und ungefilterte Vertikalbeschleunigung der rechten Vorderachse [9]

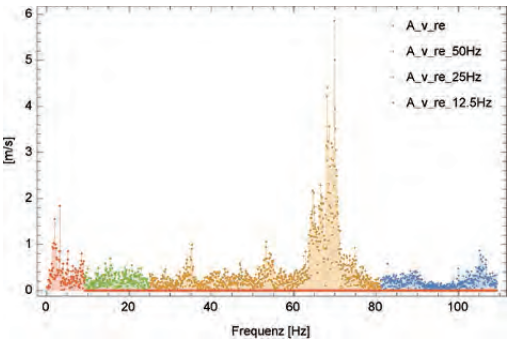


Bild 85. Zugehöriges Amplitudenspektrum der Vertikalbeschleunigung [9]

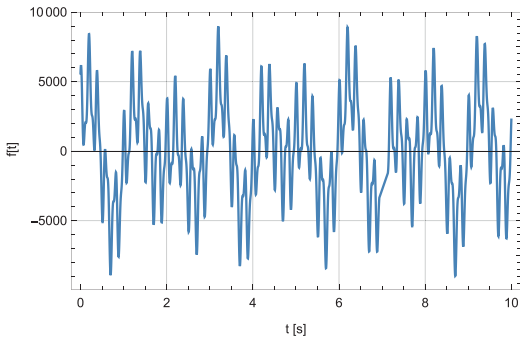


Bild 86. Zeitverlauf der Messwerte

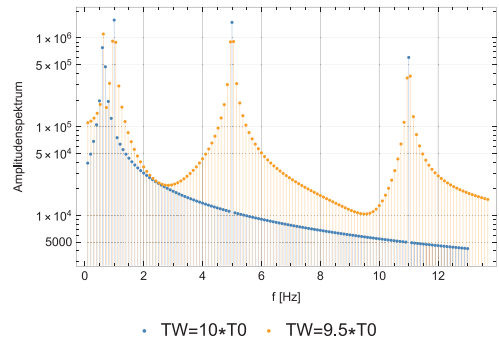


Bild 87. Amplitudenspektrum der Messwerte für unterschiedliche Fensterlängen

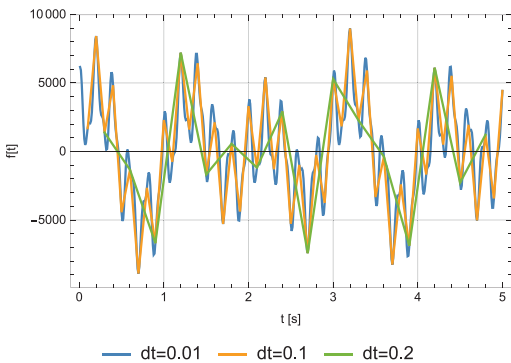


Bild 88. Zeitverlauf eines digitalisierten Messsignals für unterschiedliche Abtastschrittwerten

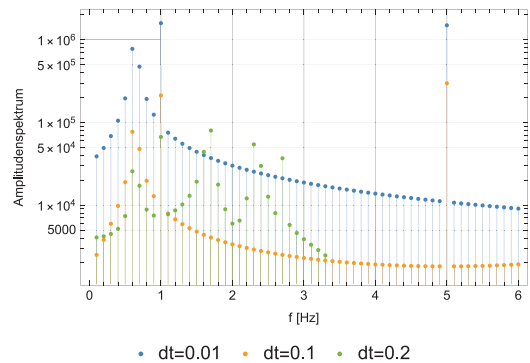


Bild 89. Amplitudenspektren der in Bild 88 dargestellten Zeitreihen

quenzspektrums (s. Bild 85). Um bei periodischen Signalen Frequenzverfälschungen infolge von Fensterlängen ungleich der Grundperiodenlänge zu vermeiden, können entsprechende Filterfunktionen angewendet werden. Hierfür wird auf die einschlägige Literatur ([1, 4, 5] etc.) verwiesen. Werden keine Filter zum Einsatz gebracht, so resultieren daraus die in den Bildern 86 bis 89 dargestellten Verfälschungen der Amplitudenspektren. Aus einer Gegenüberstellung des exakten Spektrums für die Fensterlänge $T_w = 10 \cdot T_0$ (wobei mit T_0 die Grundperiode des periodischen Signals gemeint ist) mit dem Spektrum für eine Fensterlänge $T_w = 9,5 \cdot T_0$ wird deutlich, dass Letzteres deutlich breitere Frequenzspitzen aufweist.

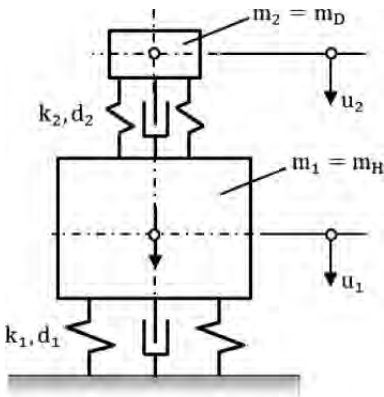
5 Ausgewählte Schwingungsphänomene

5.1 Schwingungsdämpfer

Viele Konstruktionen wie Fußgängerbrücken, Schornsteine oder turmartige Konstruktionen bedürfen schwingungsdämpfender Maßnahmen. Oftmals wer-

den dazu Schwingungstilger oder Schwingungsdämpfer vorgesehen. Unter einem Schwingungstilger wird eine federelastisch an die zu bedämpfende Hauptkonstruktion angekoppelte Masse ohne wesentliche Dämpfungseigenschaften verstanden. Dies führt bei einer idealen Frequenzabstimmung dazu, dass die Schwingungsamplituden im Falle einer harmonischen Anregung mit eben dieser Frequenz vollständig unterbunden werden. Weicht die Anregungsfrequenz nur geringfügig von diesem Sollwert ab oder sind mehrere Eigenschwingformen und somit Eigenfrequenzen der Hauptkonstruktion maßgeblich an der Schwingungsantwort beteiligt, so verliert der Tilger seine Wirksamkeit und kann die Schwingungsamplituden sogar noch verstärken. Das bedeutet, dass Schwingungstilger nur für ausgewählte Schwingungsphänomene mit definierter schmalbandiger Anregung zielgerichtet eingesetzt werden können.

Wird zusätzlich zur federelastischen Anbindung noch ein energiedissipierendes, d. h. dämpfendes, Element zwischen der Haupt- und der Zusatzmasse angeordnet, so wird diese Konstruktion als Schwingungsdämpfer bezeichnet. Wird die dominierende oder zu untersu-



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{p}(t)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix}$$

Bild 90. Zweifreiheitsgradsystem und zugehöriges Differenzialgleichungssystem

chende Schwingform der Hauptkonstruktion auf der Basis der zugeordneten generalisierten Kenngrößen beschrieben, so kann der in Bild 90 dargestellte Zweimassenschwinger als Ersatzmodell herangezogen werden. Neben dem Massenverhältnis $\mu = m_2/m_1$ wird i. d. R. auch das Frequenzverhältnis der isoliert betrachteten Schwingungssysteme $\kappa = k_2/k_1$ eingeführt. Eine qualitative wie quantitative Bewertung des vorliegenden Zweimassenschwingers kann sehr einfach auf der Basis der Frequenzgangfunktionen $H_{ij}(f)$ erfolgen. Die Frequenzgangmatrix folgt gemäß Gl. (55) zu

$$\mathbf{H}(jf) = [-(2\pi f)^2 \mathbf{M} + j2\pi f \mathbf{D} + \mathbf{K}]^{-1} \quad (82)$$

Dabei beschreiben beispielsweise die Frequenzgangfunktion $H_{11}(jf)$ die absolute Schwingungsreaktion der Hauptmasse m_1 auf eine Kraftanregung derselben und die Frequenzgangfunktion $H_{21}(jf)$ die absolute Schwingungsreaktion der Zusatzmasse m_2 auf eine Kraftanregung an der Hauptmasse m_1 . Für die konstruktive Auslegung z. B. des Dämpfergehäuses sind darüber hinaus die relativen Schwingungsamplituden zwischen den beiden Massen von Interesse, da die vorzuhaltenden Schwingwege darauf abgestimmt werden müssen. Diese können ebenfalls sehr elegant aus den Frequenzgangfunktionen ermittelt werden. Die Vergrößerungsfunktion der relativen Schwingungsamplituden zwischen den beiden Massen folgt zu

$$H_{u_2-u_1}(jf) = H_{21}(jf) - H_{11}(jf) \quad (83)$$

Bei der Subtraktion der Frequenzgangfunktionen in Gl. (83) sind zwingend die vollständigen komplexen Größen zugrunde zu legen, da ansonsten die Phaseninformation nicht richtig berücksichtigt werden kann, was zu unsinnigen Ergebnissen führt. Wie bereits in Abschnitt 2.2.1 erläutert, resultieren die nachfolgend dargestellten Vergrößerungsfunktionen der Schwingungsamplituden aus den soeben aufgezeigten Frequenzgangfunktionen zu

$$V(\omega) = \frac{u_{\text{dyn}}}{u_{\text{stat}}} = k \cdot |H(j\omega)| \quad (84)$$

Das dimensionslose Frequenzverhältnis der Anregung $\eta = \Omega/\omega_E$ wird stets auf die Eigenfrequenz des Hauptsystems $\omega_E = \omega_1 = \sqrt{k_1/m_1}$ bezogen. Wie aus der Gegenüberstellung der Vergrößerungsfunktionen für die Hauptmasse für die Massenverhältnisse $\mu = 0,1$ und $\mu = 0,05$ in den Bildern 91 bis 96 zu erkennen, ist eine bestimmte Größe der Zusatzmasse erforderlich, damit die daraus resultierende Energie die Schwingungen der Hauptmasse wirkungsvoll zu bedämpfen vermag.

Aus den Bildern 93 und 94 wird darüber hinaus deutlich, dass der Schwingungsdämpfer mit abnehmender Dämpfungscharakteristik zunehmend in Richtung Schwingungstilger strebt. Was bedeutet, dass zwar die Schwingungen der Hauptkonstruktion im Tilgungspunkt gegen null streben, aber diese für geringfügig veränderte Anregungsfrequenzen deutlich höher ausfallen. Im anderen Grenzfall einer zu hohen Dämpfung wird die Zusatzmasse starr an die Hauptmasse gekoppelt und die schwingungstilgende Wirkung geht ebenfalls gegen null.

Wie aus den Bildern 91 und 92 zu erkennen, hat die Verstimmung $\kappa = \omega_2/\omega_1$ einen entscheidenden Einfluss auf die maximalen Schwingungsamplituden der zu bedämpfenden Hauptkonstruktion. Die optimale Wirkung eines Schwingungsdämpfers folgt für die Verstimmung

$$\kappa_{\text{opt}} = \frac{1}{1 + \mu} \quad (85)$$

Neben der optimalen Verstimmung, d. h. Wahl der Eigenfrequenz der isoliert betrachteten bedämpften Zusatzmasse, lassen sich zwei Kriterien für die Wahl einer optimalen Dämpfung angeben (vgl. [2]):

$$D_{\text{opt},1} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}}$$

$$D_{\text{opt},2} = \sqrt{\frac{\mu}{2(1+\mu)}} \quad (86)$$

wobei $D_{\text{opt},1}$ stets auf geringere Dämpfungswerte führt als $D_{\text{opt},2}$. Ausgewertet für ein Massenverhältnis $\mu = 0,1$ folgen die optimale Verstimmung zu $\kappa_{\text{opt}} = 0,90909$ sowie die optimalen Dämpfungsparameter zu $D_{\text{opt},1} = 0,1678$ und $D_{\text{opt},2} = 0,213$. Für das Massenverhältnis $\mu = 0,05$ folgen diese zu $\kappa_{\text{opt}} = 0,95$, $D_{\text{opt},1} = 0,1273$ und $D_{\text{opt},2} = 0,1543$.

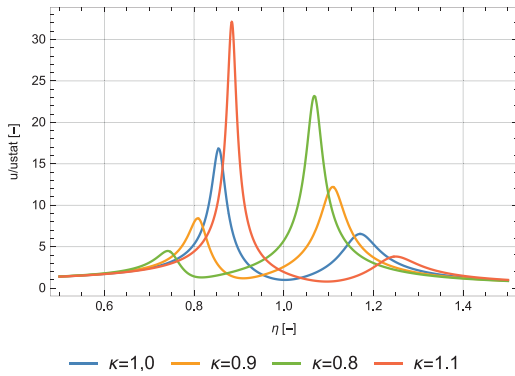


Bild 91. Belegte Schwingungsamplitude der Hauptmasse, $\mu = 0,1$, $D = 0,05$, Variation der Frequenzabstimmung

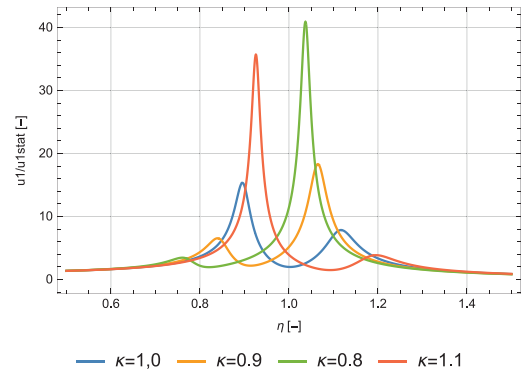


Bild 92. Belegte Schwingungsamplitude der Hauptmasse, $\mu = 0,05$, $D = 0,05$, Variation der Frequenzabstimmung

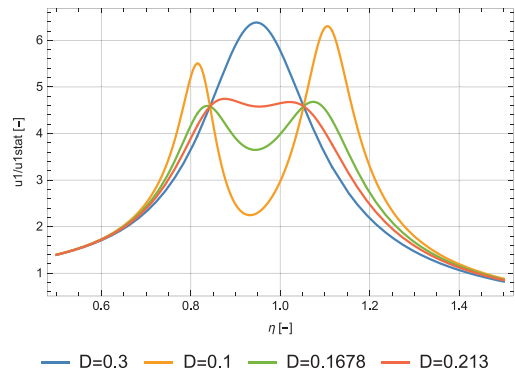


Bild 93. Belegte Schwingungsamplitude der Hauptmasse, $\mu = 0,1$, $\kappa = 0,909$, Variation des Lehr'schen Dämpfungsmaßes

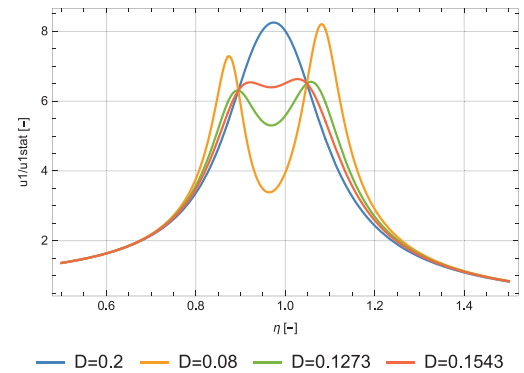


Bild 94. Belegte Schwingungsamplitude der Hauptmasse, $\mu = 0,05$, $\kappa = 0,95$, Variation des Lehr'schen Dämpfungsmaßes

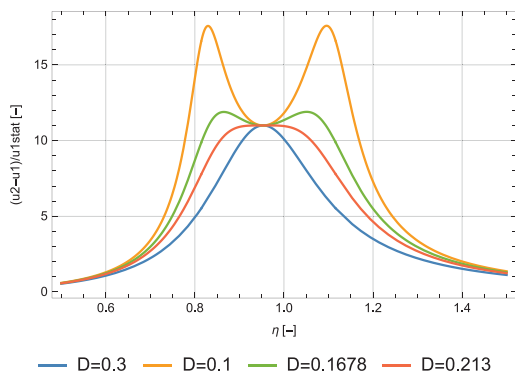


Bild 95. Belegte relative Schwingungsamplitude zwischen den beiden Massen, $\mu = 0,1$, $\kappa = 0,909$, Variation des Lehr'schen Dämpfungsmaßes

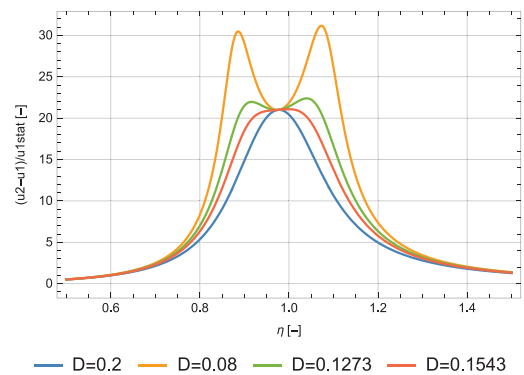


Bild 96. Belegte relative Schwingungsamplitude zwischen den beiden Massen, $\mu = 0,05$, $\kappa = 0,95$, Variation des Lehr'schen Dämpfungsmaßes

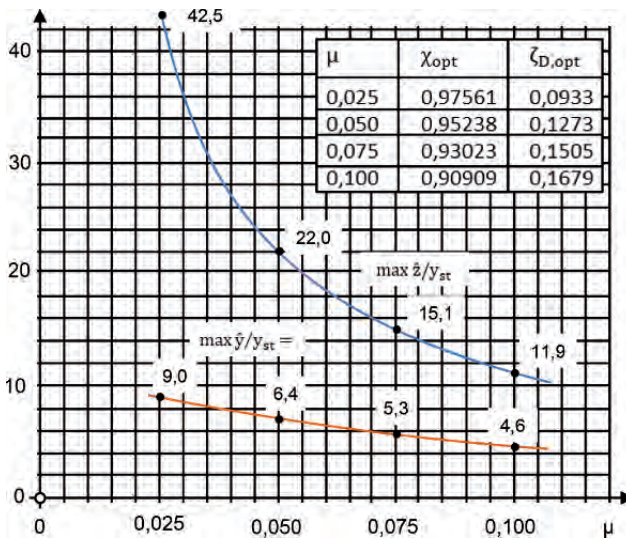


Bild 97. Bezogene Schwingungsamplituden der Haupt- und Zusatzmasse für optimale Verstimmung und optimale Dämpfungsgrade [2]

Betrachtet man ausschließlich die zu bedämpfenden Schwingungsamplituden der Hauptkonstruktion, so fällt die Wahl zweifelsohne auf das optimale Dämpfungsmaß $D_{opt,1}$, da eine höhere Dämpfung gemäß $D_{opt,2}$ keinerlei Vorteile bringt und die Schwingungsamplituden der Hauptmasse nicht weiter gedrückt werden können. Wird die Dämpfung noch höher eingestellt, so wachsen die Schwingungsamplituden sogar wieder an. Die zweite Masse wird dann zu steif bzw. starr an die Hauptmasse gekoppelt und aus dem Zweifreiheitsgradsystem wird ein Einfreiheitsgradsystem mit synchron schwingenden Massen. Aus einem Vergleich der optimalen Dämpfungswerte für die Massenverhältnisse $\mu = 0,1$ und $\mu = 0,05$ wird darüber hinaus deutlich, dass diese mit geringerer Zusatzmasse ebenfalls nach unten gehen.

Werden hingegen die Relativschwingungsamplituden der Zusatzmasse betrachtet, welche bei der konstruktiven Durchbildung des Dämpfers von Interesse sind, so fallen diese für die Dämpfung $D_{opt,2}$ etwas geringer aus als für $D_{opt,1}$. Auch diesbezüglich bringt eine noch höhere Dämpfung keine Vorteile, da die maximalen Schwingungsamplituden nicht weiter reduziert werden können.

Abschließend sei noch darauf hingewiesen, dass die maximalen Schwingungsamplituden der Hauptkonstruktion für baupraktisch sinnvolle Massenverhältnisse nur moderat von diesen abhängen und mit steigender Zusatzmasse lediglich eine geringfügige Reduzierung der Schwingungsamplituden erzielt werden kann. Hingegen sinken die Relativbewegungen der Zusatzmasse deutlich mit steigendem Massenverhältnis (s. a. Bild 97).

Fortsetzung zu Beispiel 4

Als Beispiel für die Anordnung eines Schwingungsdämpfers wird ein Abluftkamin mit einem Dämpfer im Mündungsbereich betrachtet (Bild 70). Der Kamin weist eine Gesamthöhe von 60 m, einen Rohrdurchmesser von 1,20 m sowie eine Wandstärke von durchgängig 5 mm auf. Das Flächenträgheitsmoment folgt daraus zu $I_y = \pi/4(R^4 - r^4) = \pi/4(60^4 - 59,5^4) = 335.074 \text{ cm}^4$. Mit den Formeln in Abschnitt 3.1 folgt die erste Biegeeigenfrequenz unter der Annahme einer starren Fundamenteinspannung sowie mit dem Eigengewicht von $m = A \cdot \rho = \pi(R^2 - r^2) = \pi(60^2 - 59,5^2) \text{ E4} \cdot 7850 = 187,7 \text{ E4} \cdot 7850 = 147,4 \text{ kg/m}$ zu

$$f_1 = 0,5595 \frac{1}{L^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

$$= 0,5595 \frac{1}{60^2} \sqrt{\frac{210.000 \text{ E6} \cdot 335074 \text{ E8}}{147,4}} = 0,34 \text{ Hz}$$

Die modale Steifigkeit sowie die modale Masse der Grundsichwingform können gemäß Tabelle 4 zu $m_{gen,1} = 0,24 \cdot m \cdot L = 2122 \text{ kg}$ sowie $k_{gen,1} = 3EI/L^3 = 3 \cdot 210.000 \text{ E6} \cdot 335074 \text{ E8}/60^3 = 9773 \text{ N/m}$ ermittelt werden. Mit diesen Größen kann auch die oben gefundene Eigenfrequenz zu

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_{gen,1}}{m_{gen,1}}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9773}{2122}} = 0,34 \text{ Hz}$$

bestätigt werden.

Wird nun als Massenverhältnis $\mu = 0,05$ angestrebt, so ist bereits eine Zusatzmasse von 106,1 kg erforderlich! Die optimalen Dämpfungsparameter folgen zu

$$D_{\text{opt},1} = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 0,05}{8(1+0,05)^3}} = 0,1273 \text{ und}$$

$$D_{\text{opt},2} = \sqrt{\frac{\mu}{2(1+\mu)}} = \sqrt{\frac{0,05}{2(1+0,05)}} = 0,1543$$

Die Federsteifigkeit k_2 folgt letztlich aus dem Verstim-
mungskriterium

$$\kappa_{\text{opt}} = \frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{1+0,05} = 0,95 = \frac{\omega_2}{\omega_1} \text{ zu}$$

$$\omega_2 = 0,95 \cdot \omega_1 = 2,03 \frac{\text{rad}}{\text{sec}} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \text{ bzw.}$$

$$k_2 = 437,2 \text{ N/m}$$

Wird der Dämpfer auf das Dämpfungsmaß $D = D_{\text{opt},1} = 0,1273$ eingestellt, so kann aus Bild 94 eine Schwingungsüberhöhung der Schornsteinspitze von ca. $6,5 \cdot u_{1,\text{stat}}$ für den Resonanzfall abgelesen werden. Der vorzuhaltende Schwingweg der Zusatzmasse folgt aus Bild 96 zu ca. $22 \cdot u_{1,\text{stat}}$.

Wichtig ist in diesem Zusammenhang jedoch auch die Tatsache, dass ein Schwingungsdämpfer seine Wirkung ausschließlich für Schwingbeanspruchungen in der Nähe dessen Resonanzbereichs entfalten kann. Zur Verdeutlichung wird der eben betrachtete Abluftkamin auf der Basis einer Finite-Elemente-Diskretisierung als ebenes Stabwerk modelliert und die Wirkung der angeordneten Dämpfungselemente unter Heranziehung der Frequenzgangfunktionen diskutiert.

Da hier diskrete Dämpfungselemente an eine Stabstruktur gekoppelt werden, sind zur Ermittlung der Schwingungsantwort zwingend komplexe Eigenvektoren zugrunde zu legen. Nur so kann der Einfluss einer nicht proportionalen Dämpfung korrekt erfasst werden.

Im ersten Schritt wird ein Dämpfungselement im Mündungsbereich angeordnet, welches starr an eine externe Struktur z. B. ein Gebäude gekoppelt ist. Die Struktur-dämpfung der Gesamtkonstruktion wird im Folgenden gänzlich vernachlässigt. Werden unterschiedliche Dämpfungsparameter mit $d = 55 \text{ Ns/m}$ und $d = 10 \cdot 55$

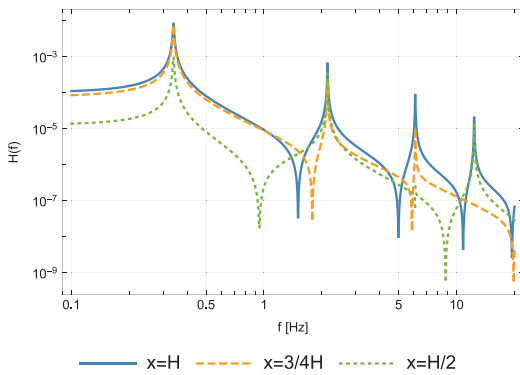


Bild 98. Frequenzgangfunktion H_{uu} für die Kragarmspitze des Kamins mit gelagertem Dämpfer, $d = 55 \text{ Ns/m}$

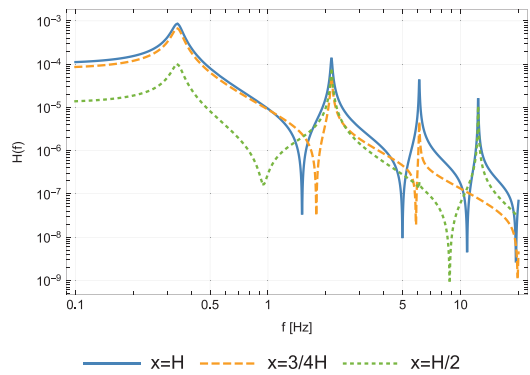


Bild 99. Frequenzgangfunktion H_{uu} für die Kragarmspitze des Kamins mit gelagertem Dämpfer, $d = 550 \text{ Ns/m}$

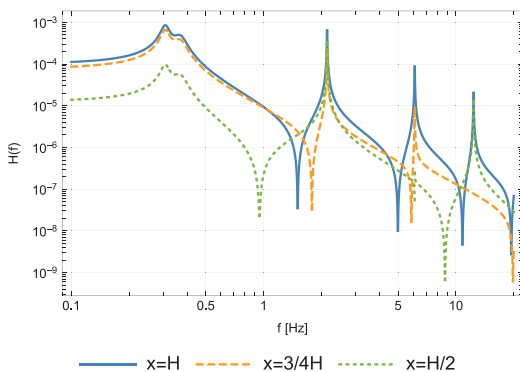


Bild 100. Frequenzgangfunktion H_{uu} für die Kragarmspitze des Kamins mit Schwingungsdämpfer, $d = 55 \text{ Ns/m}$

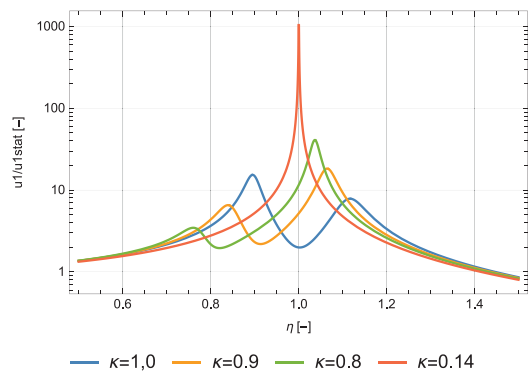


Bild 101. Bezogene Schwingungsamplitude der Schornsteinspitze, $\mu = 0,05$, $D = 0,05$, Variation der Frequenzabstimmung

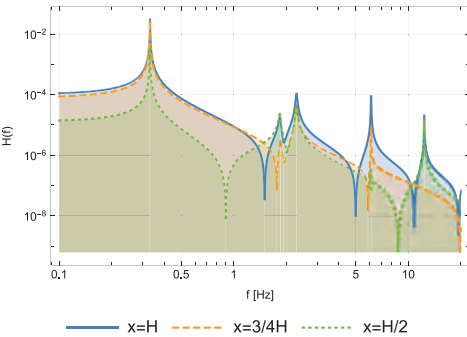


Bild 102. Frequenzgangfunktion H_{uu} für die Kragarmspitze des Kamins mit Schwingungsdämpfer (abgestimmt auf die zweite Biegeeigenfrequenz von 2,14 Hz), $d = 55 \text{ Ns/m}$

= 550 Ns/m betrachtet, so zeigen sich die in den Bildern 98 und 99 dargestellten Verläufe der Elementarfrequenzgangfunktionen.

Daraus wird deutlich, dass durch die Anordnung eines extern gelagerten Dämpfungselements sämtliche Eigenfrequenzen in ähnlicher Größenordnung bedämpft werden.

Wird hingegen ein Schwingungsdämpfer in der Form einer federelastisch gelagerten und zusätzlich bedämpften Masse angeordnet, so zeigt ein Blick auf die Elementarfrequenzgangfunktionen, dass dessen Wirkungsbereich auf Schwingbewegungen in der Nähe von dessen Resonanzbereich beschränkt bleibt (Bild 100).

Zur selben Erkenntnis gelangt man auch, wenn die Wirksamkeit des Schwingungsdämpfers auf der Basis eines kinetisch äquivalenten Zweimassenschwingers bewertet wird. Bei einer zweiten Biegeeigenfrequenz von 2,14 Hz folgt eine Verstimmung $\kappa = f_2/f_1 = 0,306/2,14 = 0,14$ sowie die daraus resultierende Schwingungsüberhöhung des Abluftkamins gemäß Bild 101.

Würde hingegen die federelastische Anbindung der Zusatzmasse auf die zweite Biegeeigenfrequenz abgestimmt mit einer Verstimmung von $\kappa = 0,9$ und einer daraus resultierenden Federsteifigkeit von 15587 N/m,

so ist aus der in Bild 102 dargestellter Frequenzgangmatrix eindeutig zu erkennen, dass dann der Dämpfer nahezu ohne Wirkung auf die erste Biegeeigenfrequenz bleibt.

5.2 Erdbeben

Durch die mit tektonischen Plattenbewegungen im Bereich der Erdkruste verbundene Energiefreisetzung erfährt ein Punkt auf der Erdoberfläche eine dreidimensionale Beschleunigung, welche über die Gründungselemente auf die Gebäude und Baukonstruktionen übertragen werden. Da Gebäude oder turmartige Strukturen in der Regel für sehr viel höhere Kräfte in vertikaler als in horizontaler Richtung ausgelegt werden, interessieren vielfach lediglich die horizontalen Beschleunigungskomponenten. Vertikale Bodenbeschleunigungen sind vorwiegend für Brücken und weitgespannte Tragwerke, wie zum Beispiel Stadiondächer, von Belang.

Dauer, Intensität und insbesondere Frequenzspektrum der am Bauwerk wirkenden Bodenbeschleunigungen hängen in hohem Maße von den örtlichen Bodengegebenheiten ab. Somit kann es u. U. einen deutlichen Unterschied bedeuten, ob ein Bauwerk auf steifen Felschichten oder auf vergleichsweise weichen bindigen Sedimentschichten gegründet ist. Diesem Einfluss wird in den einschlägigen Bemessungsvorschriften über die Zuteilung zu unterschiedlichen Untergrund- oder Baugrunderklassen Rechnung getragen.

Da die Schwingungsanregung der Baukonstruktionen durch die Bodenbewegungen erfolgt, liegt als mechanisches System ein fußpunkterregtes Schwingungssystem vor. Mit der Bodenbeschleunigung $a_F(t)$ (Bild 103, 104) folgt die zugrunde liegende Differenzialgleichung für die Relativverschiebungen zwischen Fußpunkt und Struktur $u(t)$ zu

$$m\ddot{u}(t) + d\dot{u}(t) + ku(t) = -ma_F(t) \quad (87)$$

Die Lösung auf den i. d. R. als Zeitschrieb vorliegenden Bodenbeschleunigungsverlauf kann beispielsweise über

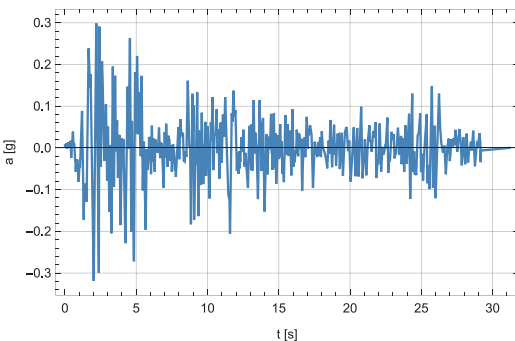


Bild 103. Horizontalbeschleunigungsverlauf für das El-Centro-Erdbeben

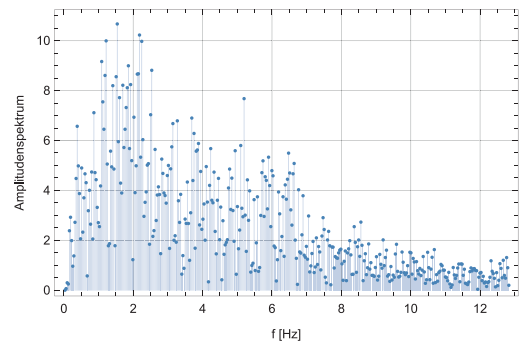


Bild 104. Zugehöriges Amplitudenspektrum

eine numerische Integration ermittelt werden (Bilder 106, 107).

Eine Möglichkeit für den Sicherheitsnachweis von Bauwerken besteht nunmehr darin, die Schwingungsreaktionen für mehrere für den Bauwerksstandort typische Beschleunigungsverläufe zu ermitteln und unter Zugrundelegung der Extremwerttheorie mit den vorhandenen Bauteilwiderständen zu vergleichen. Dies setzt die Verfügbarkeit entsprechend für den Bauwerksstandort zutreffender Beschleunigungszeitverläufe voraus und kann insbesondere für komplexe Strukturen auch sehr aufwendig sein.

Beispiel 6

Als einfaches Beispiel soll ein fünfgeschossiges, in Stahl-Verbund-Bauweise errichtetes Parkhaus untersucht werden (Bild 105). Vereinfachend werden dabei sämtliche Massen als in den Deckenscheiben konzentriert unterstellt. Die Massen der Geschossdecken wer-

den dabei einheitlich zu 570 kg/m^2 in Ansatz gebracht. Die Biegesteifigkeit der vertikalen HEB-300-Stiele folgt zu je 528 E6 kNcm^2 , die der Riegel zu je $2,5 \text{ E10 kNcm}^2$. Aufgrund der unterstellten Regelmäßigkeit der Konstruktion kann die Bemessung auf die Untersuchung eines ebenen Schnitts unter Zugrundelegung der anteiligen Massen- und Steifigkeitsverhältnisse reduziert werden. Für das gewählte Ersatzsystem ergeben sich nachfolgend aufgeführte Kenngrößen.

Eine oftmals sehr praktikable Möglichkeit der Erstellung der für die weiteren Untersuchungen erforderlichen Steifigkeitsmatrix liegt in der Invertierung der zugehörigen Nachgiebigkeitsmatrix. Diese kann zum Beispiel mithilfe handelsüblicher Stabwerksprogramme bestimmt werden. Dabei werden sukzessive Einheitslasten in Richtung der Systemfreiheitsgrade, im vorliegenden Fall horizontale Einzellasten im Bereich der Geschossdecken, aufgebracht und jeweils die zugehörigen Verformungsgrößen sämtlicher Freiheitsgrade ermittelt (vgl. z. B. [2]). Die Steifigkeitsmatrix folgt für das betrachtete Beispiel zu

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 29141167 & -30580407 & 1425447 & -66710 & 84541 \\ -30580407 & 61223532 & -31982779 & 1406218 & -69902 \\ 1425447 & -31982779 & 61115249 & -31995069 & 1509235 \\ -66710 & 1406218 & -31995069 & 61487768 & -32378650 \\ 84541 & -69902 & 1509235 & -32378650 & 63750314 \end{bmatrix}$$

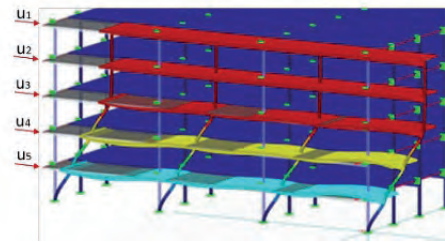
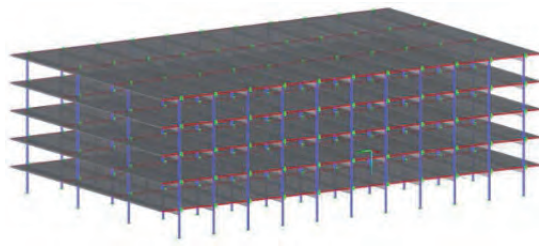


Bild 105. Gebäudekonstruktion und ebenes Ersatzsystem

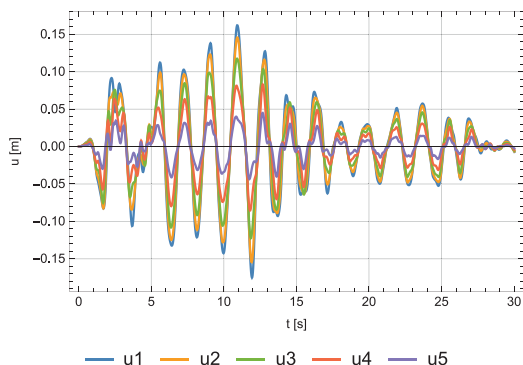


Bild 106. Schwingungsreaktion ausgewählter Systemfreiheitsgrade $D = 0,05$

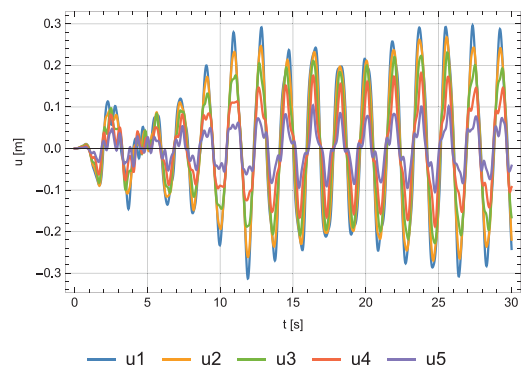


Bild 107. Schwingungsreaktion ausgewählter Systemfreiheitsgrade $D = 0$

Da ausschließlich horizontale Systemfreiheitsgrade betrachtet werden, degeneriert die Massenmatrix zur Diagonalmatrix mit den Massen der Geschossdecken auf der Hauptdiagonale.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 192000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 192000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 192000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 192000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 192000 \end{bmatrix}$$

Soll nunmehr die Schwingungsreaktion auf die in Bild 103 dargestellte Horizontalbeschleunigung des El-Centro-Bebens über eine numerische Integration nach dem Newmark-Beta-Verfahren (siehe z. B. [6]) ermittelt werden, so ist im ersten Schritt noch der zeitabhängige Belastungsvektor infolge der absoluten Fußpunktbeschleunigung $a_F(t)$ zu

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{M} \cdot \mathbf{I} \cdot a_F(t)$$

zu bestimmen. Dabei stellen $\mathbf{M}$ die Massenmatrix und $\mathbf{I}$ den sogenannten Indexvektor dar. Dieser erfasst im Allgemeinen die Wirkung der Fußpunktbeschleunigung auf die einzelnen Freiheitsgrade. Die darin enthaltenen Werte folgen zu eins für sämtliche horizontalen Freiheitsgrade und zu null für sämtliche vertikalen Freiheitsgrade. Im vorliegenden Fall stellt der Indexvektor einen Einheitsvektor mit der Länge gleich der Anzahl der Systemfreiheitsgrade dar.

Bei einer direkten Ermittlung der Schwingungsreaktion auf der Basis einer Zeitschrittintegration ist im Hinblick auf eine Vergleichbarkeit der Ergebnisse mit der Antwort-Spektren-Methode ein besonderes Augenmerk auf den Ansatz der Dämpfung zu legen. Den Bemessungsspektren in DIN EN 1998 liegt eine viskose Dämpfung mit einem Lehr'schen Dämpfungsmaß von 0,05 zugrunde. Daraus folgt ein logarithmisches Dämpfungsdekrement von $\Lambda = \frac{2\pi D}{\sqrt{1-D^2}} = \frac{2\pi \cdot 0,05}{\sqrt{1-0,05^2}} = 0,315$

und somit eine dynamische Überhöhung der Schwingungsreaktion im Resonanzfall von $V(\eta = 1) \approx \frac{\pi}{\Lambda} = \frac{\pi}{0,315} = 10$! Dies wird aus einer Gegenüberstellung der Schwingungsreaktionen des identischen Tragsystems in Bild 106 und Bild 107 für unterschiedliche Dämpfungsgrade eindrucksvoll deutlich.

Um auf handhabbare Bemessungsvorschriften für Bauwerke in Erdbebengebieten zu kommen, wird eine Reihe an Vereinfachungen vorgenommen. Die Dimensionierung von Baukonstruktionen erfolgt in aller Regel auf der Basis sogenannter Antwortspektren. Dafür werden ausgehend von gemessenen Bodenbeschleunigungswerten die daraus resultierenden Schwingungsantworten eines Einfreiheitsgradsystems unter Zugrundelegung unterschiedlicher Eigenschwingdauern sowie voneinander abweichender Dämpfungskennwerte er-

mittelt. Werden die jeweils maximalen Schwingungsreaktionen über der Eigenschwingdauer aufgetragen, so führt dies auf das gesuchte Antwortspektrum für den betrachteten Beschleunigungsverlauf. Eine Auswertung für mehrere Starkbebenereignisse sowie eine entsprechende Mittelung und Normierung führt dann auf die der Bemessung zugrunde liegenden Antwortspektren. In Bild 108 sind exemplarische Antwortspektren-Verläufe für das elastische Antwortspektrum gemäß DIN EN 1998 für unterschiedliche Lehr'sche Dämpfungsmaße angegeben, wobei der Dämpfungskorrekturbeiwert $\eta = \sqrt{\frac{10}{5 + D \cdot 100}}$ gemäß DIN EN 1998 berücksich-

tigt wurde. Ein großes Manko der weit verbreiteten Antwortspektren-Methode ist, dass diese für Einfreiheitsgradsysteme mit linear-elastischen Systemeigenschaften abgeleitet wurde. Wird das Schwingungsverhalten einer Konstruktion von der ersten Schwingungseigenform dominiert, was für sehr viele Baukonstruktionen auch der Fall ist, so liefert diese jedoch i. d. R. sehr zutreffende Ergebnisse. Hingegen müssen nichtlineare Systemeigenschaften, wie beispielsweise elastisch-plastisches Materialverhalten sowie die damit einhergehende Energiedissipation, über pauschale Vereinfachungen, wie beispielsweise einen Verhaltensbeiwert, berücksichtigt werden. Liefern auch höhere Eigenschwingformen bemessungsmaßgebende Bauwerksbeanspruchungen, so sind bei der Superposition der Massenträgheitskräfte der unterschiedlichen Schwingungsmoden aufgrund der per se fehlenden Phaseninformation weitere Überlegungen und Vereinfachungen notwendig.

Der Verhaltensbeiwert q ist definiert als das Verhältnis der Reaktionskraft der Konstruktion unter Zugrundelegung eines rein elastischen zu einem elastisch-plastischen Systemverhalten. Dieser wird i. d. R. bereits in die Bemessungsspektren mit eingearbeitet. Neben der mit plastischen Verzerrungen in Bauwerkskomponenten einhergehenden Energiedissipation geht auch eine Verlängerung der Eigenschwingdauer einher. Für ein Einfreiheitsgradsystem mit der Masse m sowie der Eigenschwingdauer T_1 kann die zugehörige Horizontalbeschleunigung $S_e(T_1)$ unmittelbar aus dem Spektrum in Bild 108 abgelesen und damit die maximale Trägheitskraft als quasi-statische Ersatzkraft zu

$\max F = m S_e(T_1)$ (88)

bestimmt werden. Für Mehrfreiheitsgradsysteme kann ausgehend von der Differenzialgleichung der Relativbewegungen $u_i(t)$ zwischen den einzelnen Tragwerkspunkten und dem Fußpunkt sowie der absoluten Fußpunktbeschleunigung $\ddot{a}_F(t)$

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{D}\dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = -\mathbf{M}\ddot{\mathbf{a}}_F(t)$$
 (89)

sowie einem modalen Ansatz gemäß Abschnitt 2.3.2.

$$\mathbf{u}(t) = \Phi \mathbf{y}(t)$$
 (90)

$$\begin{aligned}
0 \leq T \leq T_B: S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \left[1 + \frac{T}{T_B} \cdot (\eta \cdot 2,5 - 1) \right] \\
T_B \leq T \leq T_C: S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \\
T_C \leq T \leq T_D: S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[\frac{T_C}{T} \right] \\
T_D \leq T \leq 4s: S_e(T) &= a_g \cdot S \cdot \eta \cdot 2,5 \left[\frac{T_C T_D}{T^2} \right]
\end{aligned}$$

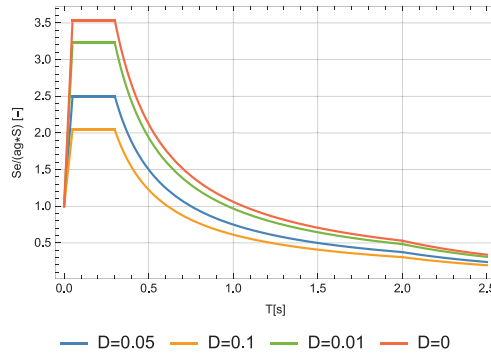


Bild 108. Horizontales elastisches Antwortspektrum gemäß EC8

eine Entkopplung des DGL-Systems erzielt werden. Die entkoppelte Schwingungsdifferentialgleichung lautet mit den generalisierten Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrizen

$$\mathbf{M}_{\text{gen}} \ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{D}_{\text{gen}} \dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}_{\text{gen}} \mathbf{y}(t) = -\underbrace{\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{I}}_{:= \mathbf{F}_{\text{gen}}(t)} \ddot{\mathbf{a}}_F(t) \quad (91)$$

Der generalisierte Belastungsvektor $\mathbf{F}_{\text{gen}}(t)$ folgt aus der transponierten Modalmatrix Φ^T , der Massenmatrix in physikalischen Lagekoordinaten $\mathbf{M}$, dem Indexvektor $\mathbf{I}$ (dieser beschreibt den Einfluss der horizontalen Fußpunktbeschleunigung auf die jeweiligen Knotenfreiheitsgrade und ist für vertikale Kragstrukturen mit ausschließlich horizontalen Verschiebungsfreiheitsgraden ein Einheitsvektor) sowie der absoluten Fußpunktbeschleunigung $\ddot{\mathbf{a}}_F(t)$.

Mit dem modalen Lastbeteiligungsfaktor $L_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{I} = \sum_{k=1}^n m_k \Phi_{ik} I_k$ sowie der generalisierten Masse $m_{\text{gen},i} = \sum_{k=1}^n m_k \Phi_{ki}^2$ folgt die Lösung für den Zeitverlauf der Schwingungsreaktion in der jeweiligen Eigenform aus dem Duhamel-Integral zu [2]

$$y_i(t) = \frac{L_i}{m_{\text{gen},i}} \frac{1}{\omega_i} \int_{\tau=0}^{\tau=t} \ddot{u}_F(\tau) e^{-D_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_i (t-\tau)) d\tau \quad (92)$$

Da im Sinne des Antwortspektrum-Verfahrens lediglich jeweils die maximalen Schwingungsamplituden jeder Eigenschwingform von Interesse sind, kann mit dem elastischen Antwortspektrum der Horizontalverschiebung $S_u(\omega_i, D_i)$ auch

$$\max |y_i(t)| = \frac{L_i}{m_{\text{gen},i}} S_u(\omega_i, D_i) \quad (93)$$

geschrieben werden. Wird die Dämpfung vernachlässigt, so gilt ausgehend von der zugrunde liegenden Differenzialgleichung die Beziehung

$$\ddot{u}_{\text{abs}}(t) = -\omega^2 \ddot{u}_{\text{rel}}(t) \quad (94)$$

Analog zu Gl. (88) kann nunmehr auch für Mehrfreiheitsgradsysteme die statische äquivalente Ersatzkraft für die physikalische Bauteilmasse m_k infolge der

Eigenschwingform i in Abhängigkeit des Horizontalbeschleunigungsspektrums zu

$$H_{E,k,i} = m_k \Phi_{k,i} \frac{L_i}{m_{\text{gen},i}} S_e(\omega_i, D_i) \quad (95)$$

bestimmt werden.

Eine sehr anschauliche quantitative Beurteilung der Frage, welcher Massenanteil der Gesamtkonstruktion in den jeweiligen Eigenschwingformen zu Trägheitskräften führen, kann der sogenannte Massenfaktor

$$e_i = \frac{m_{ei}}{\sum \mathbf{M}} \quad m_{ei} = \frac{L_i^2}{m_{\text{gen},i}} \quad (96)$$

eingeführt werden. Damit kann die je Eigenform wirkende resultierende Massenträgheitskraft zu

$$H_{E,i} = m_{ei} S_e(\omega_i, D_i) = \eta_i \sum S_e(\omega_i, D_i) \quad (97)$$

bestimmt werden. Wie bereits eingangs erläutert, sind für Mehrfreiheitsgradsysteme aufgrund der fehlenden Phaseninformation zusätzliche Überlegungen bezüglich der Überlagerung der Trägheitskräfte erforderlich. Liegen die Eigenfrequenzen weit auseinander, so können die zugehörigen Tragwerksreaktionen oder Schnittgrößen „ S_e “ als stochastisch unabhängige Größen begriffen werden und die Überlagerung zu

$$S = \sqrt{\sum_{i=1}^n S_i^2} \quad (98)$$

festgelegt werden. Liegen diese jedoch nahe beisammen, wie es nicht selten für Biege- und Torsioneigenformen von Baukonstruktionen der Fall ist, so ist eine konservativere Überlagerungsvorschrift vonnöten:

$$S = \sum_{i=1}^n |S_i| \quad (99)$$

Fortsetzung zu Beispiel 6

Im Vorgriff auf die weitere Behandlung dieses Beispiels auf der Basis des Antwortspektrenverfahrens werden die fünf Eigenschwingformen sowie die zugehörigen Eigenfrequenzen dargestellt. Gezeigt werden die Hori-

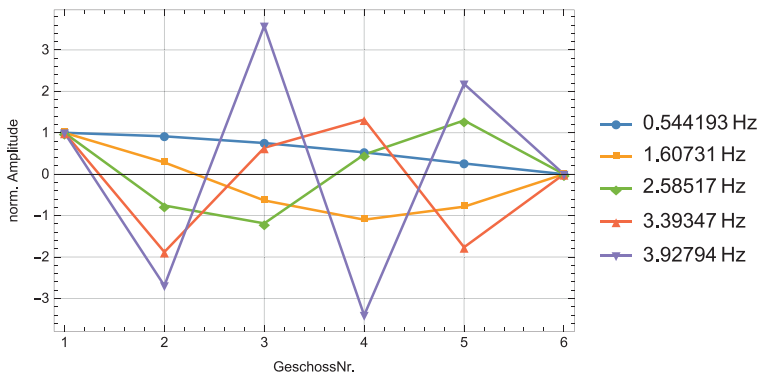


Bild 109. Eigenschwingformen des ebenen Ersatzsystems

zontalverschiebungen im Bereich der einzelnen Geschossebenen, wobei die oberste Geschossebene die Nummer 1 aufweist (Bild 109).

Entsprechend der Antwort-Spektren-Methode folgen die je Eigenschwingform wirksamen Gesamtmassen zu $m_{ei} = \{833.170, 88.502, 26.816, 9.272, 2.240\}$ [kg]. Wie aus den nachfolgend dargestellten quasi-statischen horizontalen Ersatzkräften zu erkennen, wirken diese in den einzelnen Eigenformen zum Teil in unterschiedliche Richtungen, sodass sich die Frage nach deren Superposition in besonderer Weise stellt.

$$H_{Eki} = [H_{Ek1}, H_{Ek2}, H_{Ek3}, H_{Ek4}, H_{Ek5}]$$

$$= \begin{bmatrix} 127.170 & -111.584 & 81.210 & -43.522 & 10.945 \\ 116.254 & -31.608 & -61.428 & 81.798 & -29.453 \\ 95.663 & 70.736 & -96.483 & -27.735 & 39.160 \\ 67.026 & 122.581 & 38.456 & -57.396 & -37.280 \\ 32.895 & 87.607 & 105.368 & 76.782 & 23.858 \end{bmatrix} \text{ [N]}$$

Für eine erste Beurteilung ist i. d. R. auch die Kenntnis über die je Eigenform wirksame Gesamtmasenträgheitskraft H_{Ei} gemäß Gl. (97) von Interesse. Diese ergeben sich für obiges Beispiel zu $H_{Ei} = \{439, 137, 67, 30, 7\}$ [kN].

5.3 Aeroelastische Schwingungsphänomene

Die Meteorologie unterteilt die mit einer Mächtigkeit von ca. 500 km die Erde umgebene Atmosphäre in mehrere Schichten. Für das Wettergeschehen bedeutsam sind lediglich die beiden unteren Schichten, die bodennah am Äquator bis in etwa 14 km und den Polen bis 7 km Höhe reichende Troposphäre sowie die darüber liegende Stratosphäre bis zu einer Grenzhöhe in ca. 50 km. In diesen beiden Schichten konzentrieren sich etwa 99% der Masse der Luft. Die Dichte nimmt von bodennah i. M. $1,225 \text{ kg/m}^3$ auf $0,36 \text{ kg/m}^3$ an der Grenze zwischen Troposphäre und Stratosphäre ab. Entsprechend verringert sich der Luftdruck von i. M. 1013 hPa auf 1 hPa.

Oberhalb einer 300 bis 600 m dicken bodennahen Luftschicht wird die als Gradientenwind bezeichnete Strömung im Wesentlichen von Luftdruckunterschieden

und großräumigen Luftmassenbewegungen bestimmt (Bild 110). In der darunterliegenden atmosphärischen Grenzschicht beeinflusst die Rauigkeit der Erdoberfläche die Art der Windströmung. Aufgrund der durch Reibung verursachten Verzögerung ist die Luftströmung in der atmosphärischen Grenzschicht turbulent. Damit wird die Windgeschwindigkeit regellos und Böen können Bauwerke zu Schwingungen anregen. Physikalisch betrachtet wird zu einer mittleren laminaren Strömung ein turbulenter Anteil addiert. In der Wirkung auf Bauwerke verursacht die mittlere Windströmung eine quasi statische Auslenkung in Windrichtung, der sich aus regellosen turbulenten Anteilen Schwingungen überlagern.

Bei Betrachtung eines ausreichend großen Zeitraums kann die Windgeschwindigkeit durch einen nur von der Höhe abhängigen Mittelwert und einen mit Höhe und Zeit veränderlichen turbulenten Anteil dargestellt werden. Der turbulente Anteil ist bodennah am größten und nimmt mit der Höhe ab.

$$v(z, t) = v_m(z) + v_t(z, t) \quad (100)$$

Im aktuell geltenden Regelwerk DIN EN 1991-1-4 wird das in 10 m Höhe gemessene 10-Minuten-Mittel als Basiswindgeschwindigkeit v_b bezeichnet und daraus die mittlere Windgeschwindigkeit $v_m(z)$, mit z als Höhe über Grund gebildet. In die Berechnung der mit der Höhe zunehmenden mittleren Windgeschwindigkeit gehen der jeweils mit der Koordinate z veränderliche Rauigkeitskoeffizient $c_r(z)$ sowie ein Topografiekoeffizient $c_0(z)$ ein. Zur Berechnung des Staudrucks wird ein vom zuvor genannten Reibungskoeffizienten $c_r(z)$ und dem Topografiekoeffizienten $c_0(z)$ sowie einem Böenspitzenfaktor g und der Turbulenzintensität $I_v(z)$ abhängiger Geländefaktor $c_e(z)$ eingeführt, der mit dem Basisgeschwindigkeitsdruck multipliziert das Staudruckprofil $q_p(z)$ ergibt [2]. Im nationalen Anhang zu DIN EN 1991-1-4 werden die Verläufe der höhenabhängigen mittleren Windgeschwindigkeiten und Böengeschwindigkeitsdrücke für verschiedene Geländekategorien durch Exponentialfunktionen angenähert. Die für große Lastenflächen gemittelte dynamische Böenwirkung wird über den Strukturbeiwert c_s, c_d berücksich-

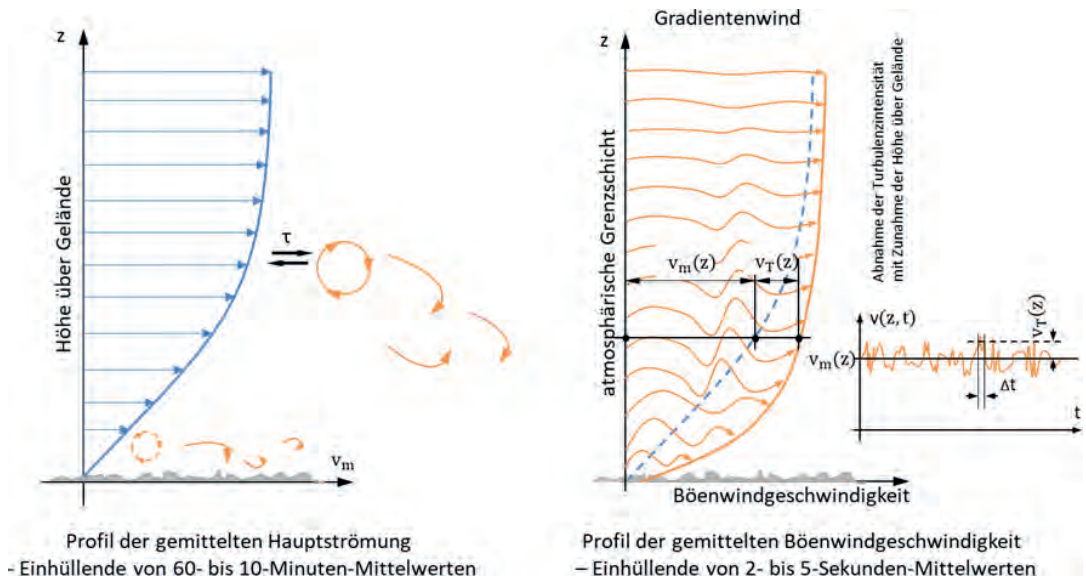


Bild 110. Mittlere Windgeschwindigkeit und Böenwindgeschwindigkeit

sichtigt. Die Winddrücke auf Oberflächen von Gebäuden folgen aus der Multiplikation des Böengeschwindigkeitsdrucks mit aerodynamischen Beiwerten. Kann ein Bauwerk als starr und nicht schwingungsanfällig klassifiziert werden, sind zuvor beschriebene Windlasten als statisch wirkend zu betrachten.

Reagiert ein Tragwerk hingegen nachgiebig auf Windwirkungen, so können durch stoßartige bzw. im Takt der Eigenfrequenzen ausgelöste Einwirkungen oder durch Bewegungen induziert resonanzartige Schwingungen auftreten. Die wiederkehrenden Bewegungen sind dabei sowohl in als auch quer zur Windrichtung zu beobachten.

5.3.1 Böenerregte Bauwerksschwingungen

In [2] ist anschaulich beschrieben, wie sich aus über Stunden andauernden großräumigen Tiefdrucklagen Stürme mit gleichförmigen energiereichen Turbulenzen entwickeln können. Dabei liefert die solare Erwärmung der Erde die zum Entstehen von Windströmungen benötigte Energie. Turbulenzen entwickeln sich aus Instabilitäten, die bodennah aus der Reibung von Windströmungen an der rauen Erdoberfläche oder in der atmosphärischen Grenzschicht aus Wechselwirkungen zwischen Luftschichten mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten entstehen. Es handelt sich dabei um in alle Richtungen orientierte Windwirbel unterschiedlicher Größe, deren Rotationsenergie aufgrund der Viskosität der Luft auf immer kleinere Wirbel übertragen wird. Dabei wird solange kinetische Energie in Wärmeenergie umgewandelt, bis die Wirbel zerfallen.

Wie einleitend bereits beschrieben, können Windströmungen in Anlehnung an die schematischen Darstel-

lungen in Bild 110 in einen Anteil laminarer Strömung mit mittleren, mit der Höhe zunehmenden Geschwindigkeiten $v_m(z)$ und überlagert mit einem mit der Höhe abnehmenden zeitabhängigen Turbulenzterm $v_T(z)$ überlagert betrachtet werden. Die sich daraus ergebenden Schwankungen des Böengeschwindigkeitsdrucks wirken als regellose stoßartige Schwingungsanregung auf Tragwerke. Dabei wird die Struktur ausgehend von der quasi statischen Auslenkung infolge der konstanten mittleren Windströmung zu Schwingungen angeregt. Die dynamische Überhöhung wird mit dem Böenreaktionsfaktor ϕ beschrieben und der Effekt bei der Angabe von Winddrücken auf Gebäude durch statische Ersatzlasten berücksichtigt. Dabei wird mit dem Böenreaktionsfaktor ϕ der Anstieg der Beanspruchungen aus Schwingungen gegenüber der statischen Auslenkung angegeben (Bild 111). Der Böenreaktionsfaktor ϕ gemäß DIN 4133 der zurückgezogenen deutschen Norm für massive und stählerne Schornsteine war definiert als der Quotient aus der Summe der Beanspruchungen aus dem Mittelwert der statischen und dem Maximalwertwert der dynamischen Beanspruchung zur statischen Beanspruchung aus den Einwirkungen der größten Böe. Eine ausführliche Darstellung verschiedener Vorschläge zur Angabe von Böenreaktionsfaktoren findet sich in [2].

Von Davenport wurde seinerzeit der Böenreaktionsfaktor auf der Basis der stochastischen Extremwerttheorie unter Zugrundelegung normalverteilter Lastprozesse sowie linearer Systemeigenschaften zu

$$G = \left(1 + \frac{\mu_x^2}{x_s} \right) = \left(1 + \frac{k_p \sigma_x}{x_s} \right) \quad (101)$$

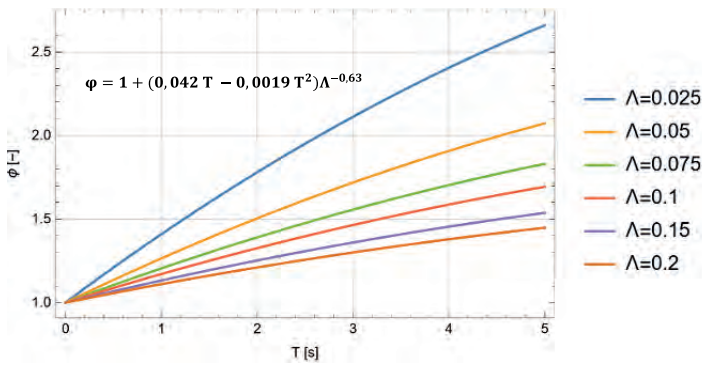


Bild 111. Böenreaktionsfaktor nach [2]

hergeleitet. Darin stellt μ_{ξ} den Mittelwert der Extremwerte der dynamischen Systemreaktion für die zugrunde liegende Beobachtungsdauer gemäß Gl. (52) bzw. k_p den Böenspitzenwert sowie σ_x die zugehörige Standardabweichung der Schwingungsreaktion dar. Mit x_s wird die statische Systemauslenkung infolge der mittleren Windgeschwindigkeit bezeichnet.

Im nationalen Anhang zur DIN EN 1991-1-4 wird mit $c_s c_d$ ein Strukturbeiwert eingeführt, der zusätzlich zur zuvor beschriebenen dynamischen Überhöhung (c_d) aus resonanzartigen Schwingungen turbulenter Windanteile berücksichtigt, dass Spitzenwinddrücke nicht zeitgleich auf der gesamten Bauteiloberfläche (c_s) auftreten. Im Gegensatz zum Böenreaktionsfaktor ist der Strukturbeiwert auf die quasi-statische Systemreaktion infolge der Spitzenwindgeschwindigkeiten bezogen. Sind in DIN EN 1991-1-4/NA abgedruckte Voraussetzungen erfüllt, so kann $c_s c_d = 1$ gesetzt werden, ansonsten ist der Strukturbeiwert nach folgender Rechenvorschrift zu ermitteln

$$c_s c_d = \underbrace{\left(1 + 2 k_p I_z(z_s) \sqrt{B^2 + R^2}\right)}_{= G} / (1 + 6 \cdot I_z(z_s)) \quad (102)$$

wobei der Zähler dem Böenreaktionsfaktor nach DIN EN 1991-1-4, d. h. der auf den Mittelwert der Systemreaktion bezogenen dynamischen Überhöhung entspricht. Dieser spiegelt, wie eingangs erläutert, die dynamische Reaktion der Konstruktion auf die Windeinwirkung wider und kann unter Zugrundelegung der Gesetzmäßigkeiten der stochastischen Dynamik hergeleitet werden, sofern der zeitveränderliche Windgeschwindigkeitsverlauf als stochastischer Prozess begriffen wird (s. hierzu auch die Ausführungen und Beispiele in Abschnitt 2.2.5).

In Gl. (102) ist k_p der Böenspitzenfaktor und z_s die Bezugshöhe zur Lage des Angriffspunkts der Windresultierenden. B steht für den Böengrundanteil und R für den Resonanzanteil. Für nicht schwingungsanfällige Tragwerke ist $R = 0$. $B = 1$ ist zu setzen, wenn keine Abminderung des effektiven Winddrucks auf größere Lasteinzugsflächen vorgenommen wird. Werden zuvor angegebene Bedingungen vorausgesetzt, ergibt sich mit

$c_s c_d = 1$ der gemäß DIN EN 1991-1-4/NA an Bedingungen zur Feststellung nicht schwingungsanfälliger Konstruktionen geknüpfte Wert.

Gleichung (102) wurde für einfache Konstruktionen, deren dominierende Grundswingformen keine Schwingungsknoten aufweisen, hergeleitet und ist im Wesentlichen auch nur für derartige Systeme anwendbar. Liegen beispielsweise abgespannte oder seitlich gestützte Kragstrukturen oder allgemein komplexere Tragstrukturen vor, so ist die dynamische Reaktion unter Zugrundelegung der Zufallsschwingungstheorie zu ermitteln (vgl. Abschnitt 2.2.5 sowie beispielsweise [10]). Dabei kommt der aerodynamischen Übertragungsfunktion, welche vereinfachend den Zusammenhang zwischen der Windgeschwindigkeit und den daraus resultierenden Windkräften beschreibt, eine entscheidende Bedeutung zu. Darüber hinaus bedeutsam ist auch der Ansatz der Kohärenzfunktionen, welche die Korrelation zwischen den Windgeschwindigkeiten in den einzelnen Bauwerksbereichen im Frequenzbereich widerspiegeln (s. Abschnitt 2.2.5).

Beispiel 7

Als Beispiel für die Anwendung des stochastischen Windlastkonzepts zur Bestimmung des Böenreaktionsfaktors wird ein frei auskragender und fest im Boden eingespannter Stahlschornstein mit einer Gesamthöhe von 60 m, einem konstanten Außendurchmesser von 1200 mm sowie einer über die Höhe abgestuften Wandstärke betrachtet. Letztere beträgt 8 mm für die untersten 20 m und 5 mm für die obersten 40 m. Darüber hinaus werden für die obersten 5 m Zusatzmassen von 450 kg/m aus Anbauten berücksichtigt.

Die mathematische Beschreibung der Konstruktion erfolgt auf der Basis von finiten Stabelementen mit einer Abschnittlänge von jeweils 4 m, was für die betrachteten niederen Eigenschwingformen durchaus ausreichend ist. Die ersten sechs Eigenfrequenzen folgen zu

$$f_1 = \{0,261877, 1,677, 4,97375, 10,5976, 18,7446, 28,5954\} \text{ [Hz]}$$

Hinsichtlich der Dämpfungseigenschaften soll ein logarithmisches Dämpfungsdekrement von $\Lambda = 0,1$ berücksichtigt werden. Soll keine modale Entkopplung der Schwingungsdifferenzialgleichung (vgl. Abschnitt 2.3.2) erfolgen, so muss die Dämpfungsmatrix a priori z. B. als Rayleigh-Dämpfungsmatrix konstruiert werden. Dabei kann das geforderte Dämpfungsmaß lediglich für zwei Schwingfrequenzen fixiert werden (vgl. Abschnitt 3.2.1). Werden hierfür die erste Eigenfrequenz mit $f_1 = 0,26187$ Hz sowie die dritte Eigenfrequenz mit $f_3 = 4,97375$ Hz gewählt, so folgen die Rayleigh-Parameter zu $\alpha = 0,05528$ und $\beta = 0,000840$. Die Güte der Dämpfungsapproximation kann Bild 112 entnommen werden. Für die ersten sechs Eigenformen resultieren die logarithmischen Dämpfungsdekremente zu $\Lambda_i = \{0,0999886, 0,0464851, 0,100011, 0,206164, 0,352761, 0,525722\}$, woraus ersichtlich wird, dass das gewünschte Dämpfungsmaß lediglich für die erste und dritte Eigenfrequenz erreicht wird.

Die Ermittlung der Schwingungsreaktion infolge der Windeinwirkung erfolgt auf der Basis des stochastischen Übertragungskonzepts unter Zugrundelegung der spek-

tralen Leistungsdichtematrizen der Windanregung sowie der Frequenzgangfunktionen der betrachteten Konstruktion (s. a. Abschnitt 2.2.5). Exemplarische Frequenzgangfunktionen sind in Bild 113 dargestellt. Dabei wird die Frequenzgangfunktion für die Schornsteinspitze einmal für die eingangs beschriebene Rayleigh-Dämpfungsmatrix abgebildet. Darüber hinaus erfolgt ein Vergleich mit der zugehörigen modalen Frequenzgangfunktion für den Fall, dass die Frequenzgangmatrix aus den Eigenformen gemäß Gl. (56) unter Ansatz einer über alle Frequenzen konstanten Dämpfung von $\Lambda = 0,1$ aufgebaut wird. Auch aus Bild 114 wird deutlich, dass das gewünschte Dämpfungsmaß exakt lediglich für die erste und dritte Eigenfrequenz erfüllt ist.

Wird die Windeinwirkung analog zu Abschnitt 2.2.5 gemäß den Angaben in DIN EN 1994-1-4 nach Gl. (48) und Gl. (59) zugrunde gelegt, so folgt die spektrale Leistungsdichte der Schwingungsreaktion an der Kragarmspitze wie in Bild 115 dargestellt.

Aus einer Integration über die spektrale Leistungsdichtefunktion gemäß Gl. (37) folgt die Standardabweichung für die Schwingungsreaktion zu $\sigma_u = 0,4$ m. Der

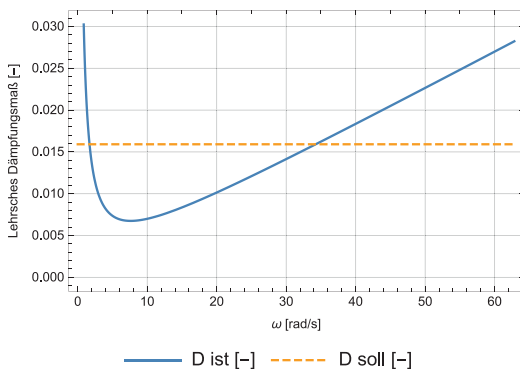


Bild 112. Rayleigh-Dämpfung – Dämpfungsparameter fixiert für die erste und dritte Eigenfrequenz

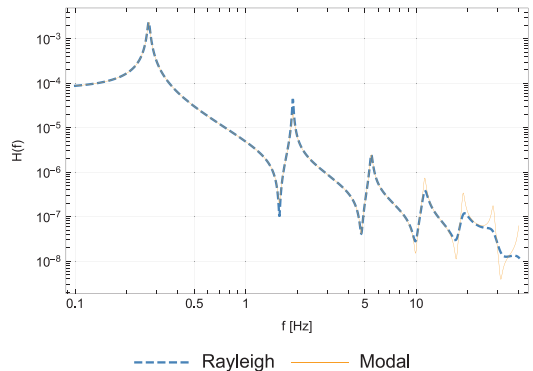


Bild 113. Exemplarische Frequenzgangfunktionen des Schornsteins und Gegenüberstellung der Rayleigh-Dämpfung mit einer modalen Dämpfungsmatrix

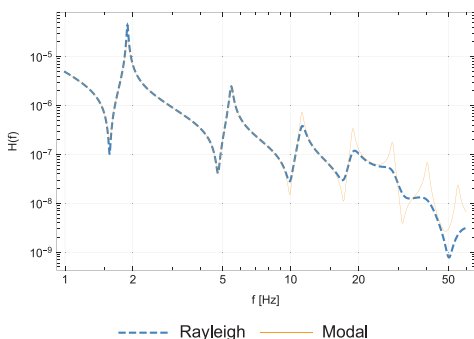


Bild 114. Gegenüberstellung der Rayleigh-Dämpfung mit einer modalen Dämpfungsmatrix

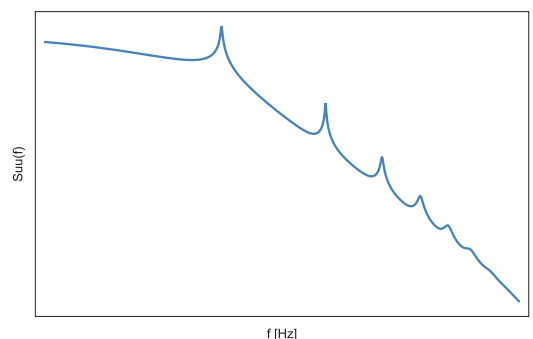


Bild 115. Spektrale Leistungsdichte der Systemreaktion an der Schornsteinspitze

Böenspitzenfaktor kann für das vorliegende Beispiel sowie eine Beobachtungsdauer von 10 Minuten gemäß Gl. (47) und Gl. (52) zu $k_p = 3,34$ ermittelt werden. Mit einer quasi statischen Auslenkung der Schornstein spitze infolge der mittleren Windgeschwindigkeit von 1,48 m ergibt sich ein Böenreaktionsfaktor nach *Davenport* nach Gl. (101) zu

$$G = \left(1 + \frac{k_p \sigma_x}{x_s}\right) = \left(1 + \frac{3,34 \cdot 0,4}{1,48}\right) = 1,9$$

5.3.2 Wirbelerregte Querschwingungen

Bei der Umströmung eines Körpers bildet sich beeinflusst von dessen Oberflächenrauigkeit und der Viskosität des umströmenden Mediums zwischen dem Rand des Störkörpers und der Außenströmung eine dünne Grenzschicht aus, über deren Dicke die Geschwindigkeit vom Wert der freien Strömung auf null an der Körperoberfläche abfällt. Von der Außenströmung zur Wand des Störkörpers findet ein nichtlinearer Anstieg der Geschwindigkeitsgradienten und damit der auf viskoser Reibung beruhenden Schubspannungen statt.

Durch die Krümmung des umströmten Körpers verringert sich luvseitig der Strömungsquerschnitt und weitet sich leeseitig wieder auf. Damit steigt die Geschwindigkeit bis zum Scheitelpunkt der gekrümmten Bauteiloberfläche an und der Druck nimmt ab. Im anschließenden Bereich der Aufweitung kehren sich die Verhältnisse um; die Strömungsgeschwindigkeit sinkt, während der Druck ansteigt. Dabei werden der Grenzschicht die Druckänderungen der Außenströmung aufgezwungen, mit der Folge, dass die kinetische Energie von entlang der Körperoberfläche durch Reibung abgebremsten Fluidteilchen nicht mehr ausreicht, um in das Gebiet mit ansteigendem Druck einzuströmen. Dabei nehmen die oberflächennahen Geschwindigkeitsgradienten sukzessive ab, bis sich bei einem Wert von null die Grenzschicht vom umströmten Körper löst und in Richtung der Außenströmung abgelenkt wird. Vom leeseitigen Druckgradienten angetrieben, entwickelt sich oberflächennah nach dem Ablösen der Grenzschicht eine der Hauptströmung entgegengerichtete Fluidbewegung, die sich aufgrund viskoser Reibung zur abgelenkten,

ursprünglich oberflächennahen Fluidschicht wieder umkehrt. Die aufsummierten Scherspannungen bilden zusammen mit den wandnah rückwärts gerichteten Druckunterschieden ein gegenläufiges Kräftepaar, welches die Fluidteilchen in Rotation versetzt. Dabei wird die Strömung eingerollt und es entsteht ein Wirbel, dreidimensional betrachtet eine Wirbelröhre. Wenn die Wirbel abreißen, driften sie in der Hauptströmung mit und bilden im Falle alternierend auf der Gegenseite des umströmten Körpers abreisenden Wirbeln im Strömungsnachlauf eine Karman'sche Wirbelstraße (Bild 116).

Parallel zur periodischen Wirbelablösungen entwickeln sich im Takt der Ablösefrequenz wirkende Kräfte. Stimmt die Ablösefrequenz mit Eigenfrequenzen der Struktur überein, kommt es zu Resonanzeffekten, welche Querschwingungen mit meist großen Amplituden nach sich ziehen und Strukturschädigungen verursachen können. Die Ablösefrequenz der Wirbelablösung und die Intensität der Krafteinwirkung hängen von der Windgeschwindigkeit und der Querschnittsform des umströmten Körpers ab.

Wie sich die Fließeigenschaften und damit auch die Wirbelablösungen entwickeln, wird von den charakteristischen Eigenschaften der Strömung bestimmt. Eine zielführende Möglichkeit zur Kennzeichnung von Strömungen kann über die Reynoldszahl erreicht werden. Bei dieser Kennzahl handelt es sich um eine dimensionslose Größe, bei der die doppelte kinetische Energie eines bewegten Fluids mit der Energie zur Aufrechterhaltung der Bewegung im reibungsbehafteten Fluid verglichen wird. Letztlich wird damit die Gegenüberstellung zweier Kennzahlen beschrieben, eine, die für die Aufrechterhaltung der Strömung und eine andere, die für das Abbremsen der Strömung steht.

$$Re = \frac{d \cdot v}{\nu} \quad (103)$$

Bei der Umströmung eines Kreiszylinders oder eines Körpers mit vergleichbar abgerundeten Kanten ändert sich bei einer für das umströmende Medium Luft vorausgesetzten kinematischen Zähigkeit von $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ mit Erreichen einer kritischen Reynoldszahl von $Re = 2 \cdot 10^5$ die Bewegung der Luftteilchen in der Grenzschicht von einer laminaren in eine turbulente

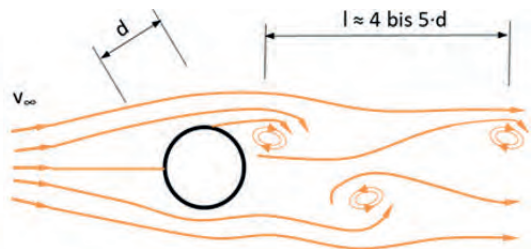
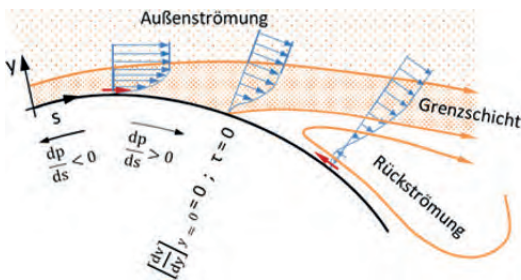


Bild 116. Strömungsabriss mit Karman'scher Wirbelstraße im Strömungsnachlauf eines zylindrischen Störkörpers

Strömung. Mit der Änderung zur turbulenten Strömung wandern die Ablösestellen der Grenzschicht beidseitig entlang des Zylinderumfangs leeseitig. Gleichzeitig rückt der im Strömungsnachlauf auftretende Umschlag von laminarer in turbulente Strömung direkt bis in die Grenzschichten des umströmten Körpers vor. Dabei verengt sich der Strömungsnachlauf und der Druck hinter dem Zylinder steigt an, sodass der Strömungswiderstand abnimmt. Die deutliche Änderung des Strömungswiderstands markiert den Übergang vom unterkritischen Bereich mit kleineren Reynoldszahlen zum überkritischen sowie transkritischen Bereich mit über dem kritischen Wert liegenden Reynoldszahlen.

Im Bereich relativ kleiner Reynoldszahlen bis $Re < 50$ entwickeln sich hinter dem laminar umströmten Zylinder zwei gegenläufig drehende, nebeneinander liegende Wirbel. Mit ansteigender Reynoldszahl reißen die Wirbel alternierend ab und es kommt im Strömungsnachlauf zur Bildung einer stabilen Wirbelstraße. Daran schließt ein Übergangsbereich mit unregelmäßiger Wirbelablösung an. Mit weiter steigenden Reynoldszahlen stabilisiert sich die Wirbelablösung in einer Strömung mit turbulenten Nachlaufzonen. Nach dem Überschreiten der kritischen Reynoldszahl ist die Strömung ausgeprägt turbulent bei stochastischer Wirbelablösung. Erst im transkritischen Bereich ab Reynoldszahlen $Re > 5 \cdot 10^6$ baut sich in der Nachlaufströmung wieder eine Wirbelstraße mit annähernd periodischer Wirbelablösung und stabiler Ablösefrequenz auf. Damit sind eindeutig periodisch ablaufende Wirbelablösungen nur im unterkritischen und transkritischen Bereich zu finden. Im überkritischen Bereich kommt es zu stochastischen Wirbelablösungen.

Bei der Umströmung von scharf begrenzten Körpern sind die Ablösestellen der Strömung durch die Kanten

vorgegeben. Es entfällt damit weitgehend die Abhängigkeit von der Reynoldszahl.

Über die Reynoldszahl konnten charakteristische Strömungseigenschaften bestimmt werden. Zur Ermittlung der Frequenz der Wirbelablösung steht die ebenfalls dimensionslose Strouhalzahl St zur Verfügung. Die Strouhalzahl ist primär eine Funktion der Reynoldszahl, die mit anwachsender Turbulenzintensität im Strömungsnachlauf von umströmten Zylindern ansteigt und damit eine Abhängigkeit von der Eigenschaft der Nachlaufströmung aufzeigt.

$$St = f_k \cdot \frac{d}{v} \quad (104)$$

In den Gleichungen zur Bestimmung der Reynoldszahl und der Strouhalzahl steht d im Falle eines Kreiszylinders für den Durchmesser und bei scharfkantig begrenzten Körpern für die Projektionsbreite normal zur Anströmrichtung. Mit v [m^2/s] ist die kinematische Zähigkeit und mit v [m/s] die Anströmgeschwindigkeit sowie mit f_k die Ablösefrequenz der abreißen und in der Nachlaufströmung mitgeführten Wirbel bezeichnet. Im unterkritischen Bereich steigt die aus Versuchen am ruhenden Kreiszylinder abgeleitete Strouhalzahl bis zu einer Reynoldszahl von $Re \approx 500$ an, bleibt danach anschließend bis zu $Re \approx 10^5$ im Mittel mit einem Wert von 0,2 nahezu konstant und steigt danach bis zur kritischen Reynoldszahl wieder etwas an. Angaben zur Strouhalzahl im überkritischen Bereich streuen aufgrund der stochastischen Wirbelablösung sehr stark, sodass mit Blick auf die aeroelastische Stabilität dieser Bereich gesondert zu behandeln ist. Erst die wieder stabile periodische Wirbelablösung im transkritischen Bereich lässt mit einem Wert von im Mittel $S = 0,3$ wieder Angaben zur Strouhalzahl zu [25] (Bild 117).

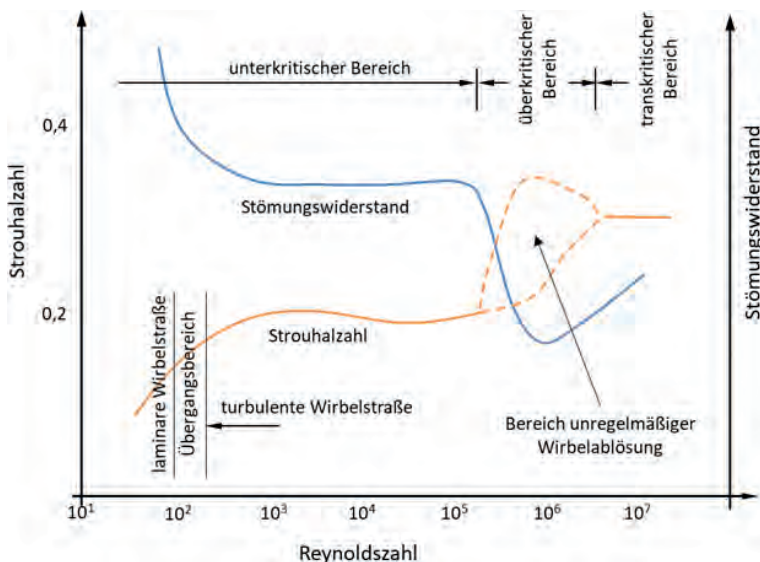


Bild 117. Qualitativer Verlauf der Strouhalzahl und des Strömungswiderstands in Abhängigkeit der Reynoldszahl [25]

Beim Ablösen eines Wirbels von einem umströmten Zylinder verringert sich auf der Seite des Wirbelabgangs die Strömungsgeschwindigkeit und wird auf der Gegenseite erhöht [26]. Mit der kurzzeitigen Geschwindigkeitsänderung ist eine Anpassung der auf den Zylinderumfang wirkenden Druckverteilung verbunden. Aufsummiert verbleibt eine von der Seite der Ablösung zur Gegenseite normal zur Anströmungsrichtung wirkende Kraft. Beim Ablösen eines Wirbels auf der anderen Seite kehren sich die Verhältnisse um, sodass auf den Zylinder periodische Quertriebskräfte wirken. Bei der kurzzeitigen Strömungsänderung bleiben die Zusammenhänge zwischen der Strouhalzahl und der Reynoldszahl erhalten, allerdings wird bei größeren Schwingungsamplituden die periodische Wirbelbildung zunehmend unterdrückt [25]. Außerdem kann vom zu Querschwingungen angeregten System in einem schmalen Frequenzband die Wirbelablösung gesteuert in der Frequenz des schwingenden Systems erfolgen. Bei eng zusammenliegenden Eigenfrequenzen ist durch die in Grenzen gelenkte Wirbelablösung eine Resonanzanregung in verschiedenen Moden möglich, mit der Folge entsprechend langer Schwingzeiten. Zur Berechnung von aus wirbelerregten Querschwingungen zu erwartenden Bauteilreaktionen können harmonisch wirkende Querlasten gemäß folgendem Ansatz verwendet werden.

$$p_k = c_{lat} \cdot q_k \cdot d \cdot \sin(2\pi \cdot f_k \cdot t) \quad [\text{kN/m}] \quad (105)$$

Der bei der Bestimmung der einwirkenden Last benötigte Quertriebsbeiwert c_{lat} ist wie die Strouhalzahl von der Reynoldszahl abhängig. Mit Bezug zur Querschnittsform können entsprechende Angaben DIN EN 1991-1-4 [20] entnommen werden. Der zur Anströmgeschwindigkeit gehörende Staudruck ist mit q_k bezeichnet und d steht beim Kreiszyylinder wieder für den Durchmesser und f_k für die aus der Gleichung zur Strouhalzahl zu bestimmende Ablösefrequenz der Wirbel.

Bei einem Tragsystem sind resonanzartige Schwingungen zu erwarten, wenn die Ablösefrequenz f_k mit einer Eigenfrequenz f_i des Systems übereinstimmt. Mit dieser Kenntnis kann die jeweils kritische Windgeschwindigkeit zu

$$v_{k,i} = \frac{1}{St} \cdot f_i \cdot d \quad [\text{m/s}] \quad (106)$$

berechnet werden. Dabei steht f_i für die Eigenfrequenz der i -ten Schwingungsform des Systems. Wird die Strouhalzahl St zu 0,2 gesetzt, vereinfacht sich die Formel zu $v_{k,i} = 5 \cdot f_i \cdot d$ und der zugehörige Staudruck folgt zu $q_{k,i} = \frac{1}{2} \rho_L v_{k,i}^2$ bzw. wenn v_k in [m/s] eingesetzt wird, auch zu $q_{k,i} = \frac{v_{k,i}^2}{1600} [\text{kN/m}^2]$.

Die Quertriebslast ist nur über eine Wirklänge L_w anzusetzen [20]. Damit soll berücksichtigt werden, dass bei großen Bauteillängen die Wirbelablösung bereichsweise willkürlich auftritt und keinesfalls zeitgleich über die gesamte Bauteillänge (vgl. [10]).

Während für die Beurteilung böeninduzierter Schwingungen stochastische Übertragungskonzepte zugrunde zu legen sind, handelt es sich bei den wirbelinduzierten Schwingungsphänomenen im Wesentlichen um resonanzartige Schwingungsüberhöhungen mit harmonischer Anregungscharakteristik.

Beispiel 8

Für Rundstahlhänger von Stabbogenbrücken (Bild 118) stellt die Beanspruchung infolge wirbelinduzierter Querschwingungen oftmals bemessungsmaßgebende Beanspruchungszustände insbesondere im Hinblick auf deren Ermüdungssicherheit dar. Im Folgenden wird die Ermittlung der ermüdungswirksamen Spannungsschwingbreiten für eine Hängeranschlusskonstruktion aufgezeigt.

Um die kritische Windgeschwindigkeit gemäß Gl. (106) ermitteln zu können, ist die Kenntnis der Eigenfrequenzen erforderlich, wobei i. d. R. für Brückenhänger die Kenntnis der ersten beiden Eigenfrequenzen ausreichend ist. Aufgrund der Biegeweichheit der Brückenhänger im Verhältnis zur Dehnsteifigkeit hat die wirksame Hängernormalkraft einen entscheidenden Einfluss auf die Eigenschwingzeiten und muss zwingend berücksichtigt werden. Das bedeutet, dass bei deren Ermittlung Effekte nach Theorie II. Ordnung zu berücksichtigen sind. Nach [2] können die Eigenfrequenzen unter Berücksichtigung der Zugkraft Z , der Massebelegung μ , der Knicklänge s_k sowie der Biegesteifigkeit EI zu

$$\omega_i = \frac{i \cdot \pi}{L} \cdot \sqrt{\frac{Z}{\mu}} \cdot \sqrt{1 + i^2 \cdot \pi^2 \cdot \frac{EI}{Z \cdot s_k^2}} \quad (107)$$

ermittelt werden.

Wird exemplarisch der Hänger mit einer Länge von 17,7 m herausgegriffen, so folgt für eine wirksame Normalkraft von 600 kN eine Grundeigenfrequenz von 3,4 Hz (Bild 119). Daraus folgt die kritische Windgeschwindigkeit zu $v_{k,1} = 5 \cdot 3,4 \cdot 0,086 = 1,462 \text{ m/s}$ und daraus in weiterer Folge die Reynoldszahl zu

$$Re = \frac{d \cdot v_k}{\nu} = \frac{0,086 \cdot 1,462}{1,5E-5} = 8382.$$

Damit kann DIN 1991-1-4 ein Quertriebsbeiwert von $c_k = 0,7$ entnommen werden. Die wirksame Quertriebslast resultiert dann gemäß Gl. (105) zu

$$\begin{aligned} p_k &= c_k \cdot \frac{v_k^2}{1600} \cdot d \cdot \sin(2\pi \cdot f_k \cdot t) \\ &= 0,7 \cdot \frac{1,462^2}{1600} \cdot 0,086 \cdot \sin(2\pi \cdot 1,462 \cdot t) \\ &= 8,04 \text{ E5 } [\text{kN/m}] \cdot \sin(10,32 \cdot t) \end{aligned}$$

was auch durch die Angaben in [24] bestätigt werden kann. Diese Quertriebslast wirkt auf den ersten Blick vernachlässigend klein. Da es sich näherungsweise um eine resonanzartige Anregung mit harmonischer Lastcharakteristik handelt, kann der dynamische Vergrößerungsfaktor zu π/Λ abgeschätzt werden. In [24] wird für das logarithmische Dämpfungsdekrement ein Wert von $\Lambda = 0,0015$ angegeben. Damit folgt eine dynami-

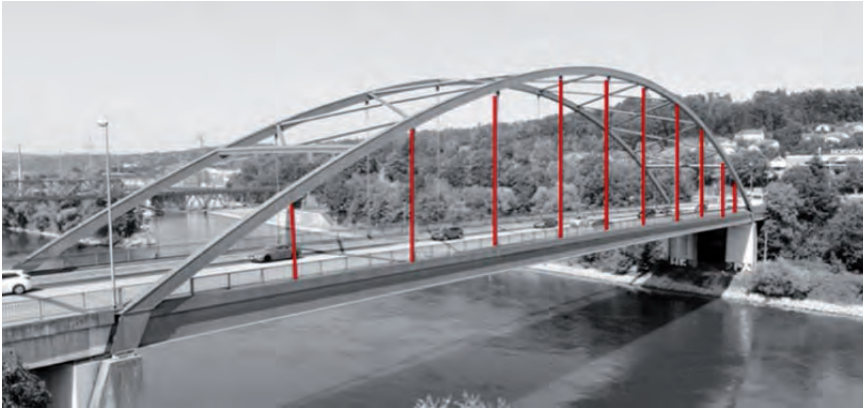


Bild 118. Stabbogenbrücke mit Rundstahlhängern mit einem Außendurchmesser von je 86 mm

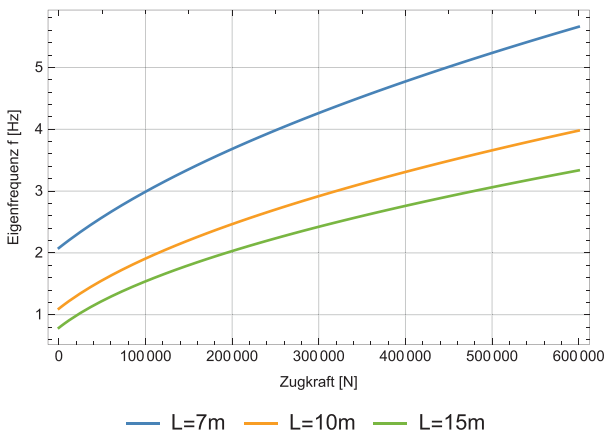


Bild 119. Abhängigkeit der ersten Eigenfrequenz von der Normalzugkraft (dargestellt für die Hänger Nr. 2 bis 4)

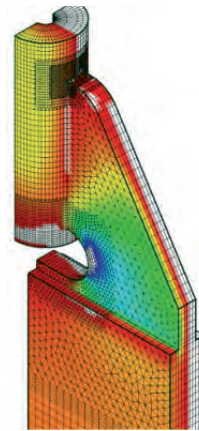


Bild 120. Qualitative Darstellung der Strukturspannungen im Bereich der Hängeranschlussbleche

sche Überhöhung von $\pi/\Lambda = \pi/0,0015 = 2094$! Die damit einhergehenden Biegemomentenbeanspruchungen führen im betrachteten Fall in Verbindung mit einer im Hinblick auf die Bauteilermüdung ungünstigen Ausbildung der Hängeranschlussbleche (s. Bild 120) zu bemessungsmaßgebenden Strukturspannungen.

5.3.3 Bewegungsinduzierte Schwingungen

Im Gegensatz zu den aufgrund von Böen in Windrichtung und quer dazu durch Wirbelablösungen ausgelösten Tragwerksschwingungen, entstehen selbstinduzierte Windschwingungen aus verformungsgesteuerten Änderungen der Winddruckverteilungen. Dabei verändert die Bewegung des Tragwerks die auf die Struktur gerichtete Windströmung, die in einer Rückkopplung wieder die auf das Tragwerk wirkenden Windkräfte an-

passt. Ausgelöst durch eine kleine Störung wird bei dieser Wechselwirkung der umgebenden Windströmung Energie entzogen, welche bei gering gedämpften Tragwerken die Eigenschwingungen ansteigend anfacht. Anfällig sind schlanke, insbesondere biege- und torsionselastische Strukturen, die eine aeroelastisch instabile Querschnittform aufweisen.

Werden quasi-stationäre, sich mit der Bewegung der Struktur verändernde Luftkräfte vorausgesetzt, so werden entkoppelte Biege- oder Torsionsschwingungen als Galloping oder Divergenz und im Falle instationärer Luftkräfte mit gekoppelten Biege- und Torsionsschwingungen als Flattern bezeichnet [25]. Verfahren zur Beschreibung der ebenfalls durch Bewegung angefachten Regen-Wind-induzierten Schwingungen setzen wie beim Galloping quasi stationäre, mit der Bewegung veränderliche Luftkräfte voraus [29, 39].

5.3.3.1 Galloping

Mit Galloping werden selbstinduzierte Windschwingungen bezeichnet, wenn dabei Bewegungen zu beobachten sind, die einem galoppierenden Pferd ähneln. Charakteristisch sind dabei Schwingungen mit niedriger Frequenz bei vergleichsweise großen Amplituden. Der ebenfalls zur Kennzeichnung der Auslösung der Bewegung gebräuchliche Begriff der Formanregung weist darauf hin, dass Galloping in ausreichend elastischen Strukturen nahezu unabhängig von der Querschnittsform auftreten kann. Weniger anfällig sind kreisförmige Querschnitte, allerdings nur, wenn sichergestellt ist, dass nicht durch z. B. Eisbesatz eine vom Kreis abweichende Querschnittsform möglich ist.

Da im Gegensatz zu den im nachfolgenden Abschnitt behandelten Flatterschwingungen bei den Galloping-Schwingungen entweder Bewegungen senkrecht zur Anströmrichtung oder Torsionsschwingungen auftreten, genügt zur Beschreibung von Gallopingeffekten ein Modell mit einem Freiheitsgrad. Verwendet werden kann ein umströmter massebehafteter Ersatzquerschnitt, der auf einem Feder-Dämpfungs-Element gelagert ist. Feder und Dämpfer stehen dabei für die Biegesteifigkeit und die Dämpfung der betrachteten Struktur.

In Bild 121 ist linksseitig ein schräg angeströmter quaderförmiger Körper dargestellt, dessen gleichförmige Strömung aufgrund der vom Hindernis verursachten Einengung an der vorderen oberen Kante abreißt und seitlich abgedrängt den Körper beschleunigt umfließt. An der Unterseite liegt die Strömung am Körper an. Im Raum zwischen der Körperoberfläche und der abgelenkten Strömung entsteht ein in Analogie zur Flüssigkeitsströmung mit Totwasser bezeichneter Bereich mit turbulenter Strömung. Diese Zone steht mit der Umströmung in Kontakt, sodass sich Wirbel bilden und körperseitig ein Unterdruck entsteht. Auf der Gegenseite erhöht sich bei Umströmung aufgrund der not-

wendigerweise eng beieinander liegenden Stromlinien die Strömungsgeschwindigkeit mit der Folge eines entsprechend verminderten Luftdrucks.

Eine vergleichbare Umströmung mit entsprechender Druckverteilung entsteht, wenn sich der in Bild 121 rechtsseitig dargestellte Körper bei horizontaler Windanströmrichtung in der vorgegebenen Richtung bewegt. Bei Integration der Druckverteilungen über die Oberflächen normal zur z-Achse verbleibt eine die Bewegung antreibende resultierende Kraft. Erst wenn aufgrund der Verschiebung, die in der Feder gespeicherte Arbeit eine aus den Änderungen der Windströmung dem System zugeführte Energie übersteigt, kommt die Bewegung zum Stillstand und kehrt sich um. Da bei der Rückwärtsbewegung wieder gleichgerichtete dynamische Windkräfte geweckt werden, wird dem System weiter Energie zugeführt. Wird dem System mehr Energie zugeführt als durch Dämpfung dissipiert werden kann, entstehen Galloping-Schwingungen mit relativ großen Amplituden. Eine wirksame Dämpfung kann die Schwingungsausschläge reduzieren.

Die eine wie zuvor beschriebene Schwingbewegung auslösenden aerodynamischen Windkräfte sind eine Funktion der Schwinggeschwindigkeit und können deshalb wie eine viskose Dämpfung betrachtet werden. Diese als aerodynamische Dämpfung bezeichneten Kräfte wirken bei den hier betrachteten Schwingungen den Dämpfungsreaktionen der Struktur entgegen. Übersteigt die aerodynamische Dämpfung die Strukturdämpfung, wird die Gesamtdämpfung negativ und das System bezieht Anregungsenergie aus der Strömungsenergie des Windes. Diese selbst anfachende Schwingung, bei der aus der Windströmung mehr Energie aufgenommen als vom System dissipiert wird, setzt oberhalb einer Anregungsgeschwindigkeit ein [2]. Anzustreben sind deshalb Tragstrukturen, deren Einsetzgeschwindigkeiten einen möglichst großen Abstand zu Gallopingsschwingungen auslösenden Windgeschwin-

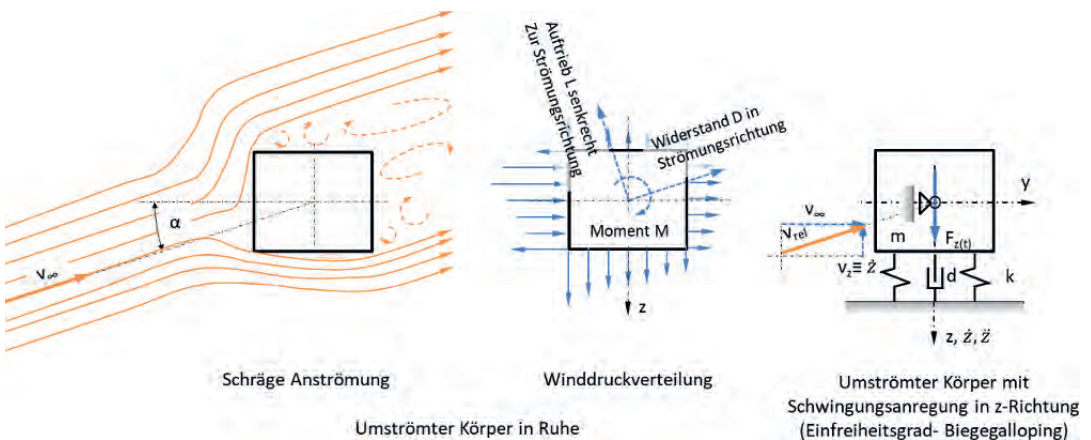


Bild 121. Verlauf der Anregung von Gallopingsschwingungen [2, 26]

digkeiten haben. In DIN EN 1991-1-4 wird diese Vorgehensweise aufgegriffen und als Stabilitätskriterium eine mit v_{CG} bezeichnete Einsetzgeschwindigkeit definiert. Zusätzliche Hinweise zu den Stabilitätskriterien zur Vermeidung von Galloping-Torsionsschwingungen können [21] entnommen werden. Da das Stabilitätskriterium jeweils für das betrachtete Bauteil gilt, sind bei der Überprüfung einer Gallopinganfälligkeit stets auch lokale Windeffekte zu berücksichtigen.

Mit Verweis auf DIN EN 1991-1-4 [20] kann die Einsetzgeschwindigkeit v_{CG} für entkoppelte Galloping-Biegeschwingungen wie folgt abgeschätzt werden:

$$v_{CG} = 2 \cdot \frac{S_c}{a_G} \cdot n_{1,y} \cdot b \text{ [m/s]} \quad (108)$$

In obiger Gleichung steht S_c für die strukturabhängige Scroutonzahl. Bei dieser auch als Massendämpfungsparameter bezeichneten dimensionslosen Kenngröße handelt es sich um die Verknüpfung der Strukturdämpfung mit dem Verhältnis aus bewegter Bauteilmasse zu verdrängter Luftmasse. Mit $n_{1,y}$ ist die der Untersuchung ausreichende Gallopingstabilität zugrunde gelegte Grundfrequenz und mit b die Abmessung des Querschnitts senkrecht zur Hauptströmungsrichtung bezeichnet. Der im Nenner stehende Stabilitätsbeiwert a_G ist von der Form des Querschnitts abhängig. Er kann für verschiedene Querschnittsgeometrien DIN EN 1991-1-4 [20] entnommen werden.

Zur Gewährleistung einer ausreichenden aeroelastischen Stabilität ist gemäß [20] nachzuweisen, dass $v_{CG} > 1,25 v_m$ ist. Für v_m ist die mittlere Windgeschwindigkeit in der Höhe, in der Gallopingeffekte erwartet werden, einzusetzen. Sollte die kritische Windgeschwindigkeit für wirbelinduzierte Schwingungen $v_{crit} \equiv v_k$ das Kriterium $0,7 < v_{CG}/v_{crit} < 1,5$ erfüllen, ist eine gegenseitige Beeinflussung wahrscheinlich und Sonderuntersuchungen werden empfohlen.

Bei nicht gekoppelten, eng beieinanderstehenden zylindrischen Bauwerken, wie z. B. Schornsteinen, kann es abhängig vom Anströmwinkel zu einer weiteren Form bewegungsinduzierter Schwingungen, dem sogenannten Interferenzgalloping kommen. Als wirkungsvolle

Gegenmaßnahme wird eine Kopplung der Zylinder empfohlen. Dabei ist jedoch zu beachten, dass auch im Falle gekoppelter zylindrischer Bauwerke dem klassischen Galloping vergleichbare Schwingungen auftreten können. Zur Beurteilung der aeroelastischen Stabilität zur Vermeidung von Interferenzgalloping finden sich in [2] und [20] einfach zu handhabende Kriterien.

5.3.3.2 Flattern und Divergenz

Im Gegensatz zu dem beim Galloping nur in Richtung eines Freiheitsgrads ausweichenden System, handelt es sich beim Flattern um eine aeroelastische Instabilität mit gekoppelten Biegetorsionsschwingungen. Flatterschwingungen und Divergenz treten bei Strukturen mit geringer Steifigkeit und flachen Querschnitten auf. Gefährdet sind weitgespannte plattenartige Konstruktionen wie Hängebrücken aber auch Hinweisschilder und auskragende Dachkonstruktionen.

Bei einem frei schwingenden System befinden sich die Trägheitskräfte und die elastischen Kräfte im Gleichgewicht. Ohne den Einfluss von Dämpfung bleibt die Summe aus potenzieller und kinetischer Energie über die Zeit betrachtet konstant. Wird Fremdanregung ausgeschlossen, kann eine Instabilität mit überlinear bis zum Versagen anwachsenden Verformungen nur auftreten, wenn das schwingende System der Umgebung, im hier betrachteten Fall der Windströmung Energie entzieht. Bei der Umströmung einer flattergefährdeten Tragstruktur entstehen an den Oberflächen abhängig von deren Lage zur Anströmung instationäre und nichtlinear verlaufende Winddruckverteilungen. Die Einwirkungen können aufsummiert über die Querschnittsränder zu Windwiderstandskräften, Auftriebskräften und Momenten zusammengefasst werden [28]. Am verformten System verrichten diese Kräfte Arbeit. Ist die zugeführte Energie der selbstinduzierten Windreaktionen am schwingenden System größer als die infolge Dämpfung dissipierte Arbeit, kommt es zu Flatterschwingungen. Damit ist die Dämpfung wie beim Galloping wieder ein direkter Indikator für die Stabilität des schwingenden Systems.

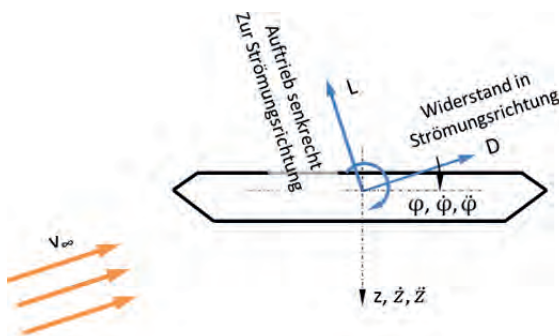
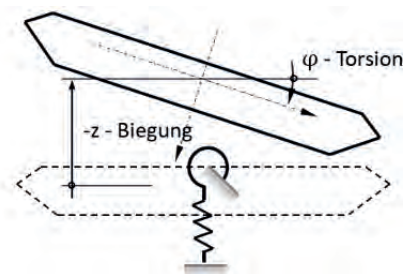


Bild 122. Flatterschwingungen



Gekoppelte Biegetorsionsschwingungen

Wie beim Galloping können beim Flattern die geschwindigkeitsabhängigen Windreaktionen als aerodynamische Dämpfung aufgefasst werden, die anders als die stets reduzierend wirkende Strukturdämpfung je nach Phasenlage der instationären Druckverteilung zur verformten Lage sowohl hemmend als auch antreibend wirken kann. Damit kann eine divergente Anregung durch zeitabhängige Luftreaktionen entstehen, wenn die Summe aus Strukturdämpfung und aerodynamischer Dämpfung negativ wird und das Tragsystem damit in die Lage versetzt wird, Energie aufzunehmen. Der Fall aufgehobener Dämpfung stellt damit den Übergang zwischen stabiler zur instabilen Schwingung dar. Setzt dieser Effekt nur bei einem der an Flatterschwingungen beteiligten Freiheitsgrade ein, liegt als Grenzfall Galloping vor, entweder wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, Biege- oder Torsionsgalloping. Werden Schwingungen in Richtung der beiden betrachteten Freiheitsgrade angeregt und liegen die Einzelfrequenzen eng genug beieinander, so kommt es zur Kopplung von Biege- und Torsionsschwingungen in der gleichen Anregungsfrequenz. Mit der Gleichschaltung wird die Summe aus Strukturdämpfung und aerodynamischer Dämpfung beim Erreichen der kritischen Anströmgeschwindigkeit negativ und das Tragsystem reagiert mit divergentem Flattern. Das eigentliche Ziel einer Flatteranalyse ist daher die Suche nach der kritischen Anströmgeschwindigkeit, bei der die Stabilitätsgrenze gerade noch nicht erreicht wird. Zielführend erweist sich auch, die Frequenzen koppelgefährdeter Eigenbewegungen ggf. durch Veränderungen an der Tragstruktur soweit zu entzerren, dass die anfachende Wirkung der Kopplung über Luftkräfte reduziert bis nicht möglich wird [27].

Gemäß [20] sind Tragsysteme auf aerodynamische Instabilitäten wie Divergenz und Flattern zu untersuchen, wenn es sich um Bauwerke oder Bauteile mit langgestrecktem plattenartigem Querschnitt und Abmessungsverhältnissen von Breite zur Höhe kleiner als 0,25 handelt, deren Torsionsachse parallel zur Plattenebene und senkrecht zur Windrichtung verläuft. Es ist eine mindestens um das Maß $d/4$ von der luvseitigen Kante entfernte Exzentrizität der Torsionsachse vorauszusetzen. Mit d ist in diesem Fall die Breite des Querschnitts in Richtung der Anströmung gemeint. Damit sind auch aerodynamische Instabilitäten von mittig oder exzentrisch angeschlossenen Hinweisschildern und an der lee-seitigen Kante gelagerte auskragende sowie freistehende Konstruktionen zu beurteilen. Weiterhin muss die niedrigste Eigenfrequenz zu einer Torsionsschwingung gehören oder die Torsionseigenfrequenz weniger als das Doppelte der niedrigsten translatorischen Schwin-

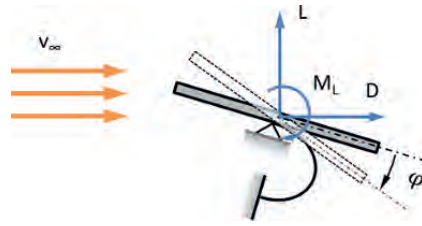


Bild 123. Divergenz [22, 31]

gungsform betragen. Damit ist die zuvor als zielführend beschriebene Entzerrung koppelgefährdeter Frequenzen zahlenmäßig bewertet.

Auch die Anwendung numerischer Analyseverfahren lässt die Bewertung einer Tragstruktur mit Blick auf deren Anfälligkeit für Flatterschwingungen nur in Grenzen zu. Meist werden Untersuchungen im Windkanal durchgeführt. DIN EN 1991-1-4 enthält keine Angaben zur Einsetzgeschwindigkeit von Flatterschwingungen [2, 20].

Im Gegensatz zur dynamischen Instabilität, bei der die aerodynamische Dämpfung größer als die Strukturdämpfung wird, handelt es sich im Fall von Divergenz um eine statische Instabilität, bei der aerodynamische Kräfte wie negative Steifigkeiten wirken und damit die Gesamtsteifigkeit des Tragsystems gegen null laufen kann. Die aerodynamischen Windkräfte wachsen dabei progressiv mit zunehmenden Verformungen bis zum Erreichen der Verzweigungslast an. In Bild 123 ist ein mittig gelagertes Tragsystem dargestellt, bei dem die Windkräfte mit der Torsionsauslenkung ansteigen.

Die zugehörige kritische Windgeschwindigkeit, ab der bei aerodynamischen Torsionseinwirkungen mit Divergenz zu rechnen ist, kann unabhängig von der Einhaltung von Ausschlusskriterien gemäß nachfolgender, in DIN EN 1991-1-4 [20] abgedruckter Rechenvorschrift abgeschätzt werden:

$$v_{\text{div}} = a \left[\frac{2 \cdot k_{\theta}}{\rho \cdot d^2 \cdot \frac{d_{\text{CM}}}{d\theta}} \right]^{0,5} \quad [\text{m/s}] \quad (109)$$

Es steht k_{θ} für die Torsionssteifigkeit, ρ für die Dichte der Luft, d für die Tiefe des Bauwerks in Windrichtung und $d_{\text{CM}}/d\theta$ für den [20] zu entnehmenden Wert der Ableitung des aerodynamischen Momentenbeiwerts nach der Verdrehung um die Torsionsachse. Es ist nachzuweisen, dass die kritische Windgeschwindigkeit $v_{\text{div}} < 2 \cdot v_{\text{m(ze)}}$ ist. Unter $v_{\text{m(ze)}}$ ist die mittlere Windgeschwindigkeit am gefährdeten Objekt zu verstehen.

6 Literatur

- [1] Natke, H. B. (1993) *Einführung in Theorie und Praxis der Zeitreihen und Modalanalyse*, Vieweg Verlag, Wiesbaden.
- [2] Petersen C. (2000) *Dynamik der Baukonstruktionen*, Vieweg Verlag, Wiesbaden.
- [3] Müller, P. C.; Schiehlen W. O. (1976) *Lineare Schwingungen*, Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden.
- [4] Brigham, E. O. (2010) *FFT-Anwendungen*, Oldenbourg Verlag, München.
- [5] Föllinger, O.; Franke D. (1982) *Einführung in die Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme*, Oldenbourg Verlag, München.
- [6] Müller, G.; Buchschmid M. (2008) Modellierung und Berechnung in der Baudynamik, in *Stahlbau-Kalender 2008* (Hrsg. Kuhlmann, U.), Ernst & Sohn, Berlin.
- [7] Müller, G. (2010) *Baudynamik*, Vorlesungsskript Technische Universität München.
- [8] Gasch, R.; Knothe, K. (1987 und 1989) *Strukturdynamik*, Band 1 und 2, Springer Verlag, Heidelberg.
- [9] Friedl, R. (2017) *Grundlagenorientierte theoretische und experimentelle Untersuchungen zum Schwingungsverhalten einer modifizierten Schwenktraversendehnfuge sowie zu fahrbahnunebenheitsinduzierten Radkraftschwankungen von Straßenfahrzeugen im Hinblick auf die daraus resultierende Streuung messtechnisch erfasster Fahrzeuggewichte*, Dissertation, Universität der Bundeswehr München.
- [10] Peil, U.; Clobes, M. (2008) Dynamische Windeinwirkungen, in *Stahlbau-Kalender 2008* (Hrsg. Kuhlmann, U.), Ernst & Sohn, Berlin.
- [11] Petersen, Ch. (2001) *Schwingungsdämpfer im Ingenieurbau*, Maurer Söhne GmbH & Co. KG, München.
- [12] Zienkiewicz, O. C. (1977) *The Finite Element Method*, McGraw-Hill Book Company, Great Britain.
- [13] Bathe, K. J. (2012) *Finite Element Procedures*, PHI Learning Private Limited, New Delhi.
- [14] Bachmann, et al. (1995) *Vibration Problems in Structures*, Birkhäuser.
- [15] Wirshing, P. H. (1995) *Random Vibrations – Theory and Practice*, Dover Publications, Inc. New York.
- [16] Waller, H.; Krings, W. (1975) *Matrizenmethoden in der Maschinen- und Bauwerksdynamik*, Wissenschaftsverlag, Speyer.
- [17] Bletzinger, K.-U. (2009) *Berechnen von Tragwerken*, Vorlesungsskript Technische Universität München.
- [18] Ruck B. (2018) *Gebäude und Umweltaerodynamik*, Vorlesungsskript, KIT, Institut für Hydromechanik, Karlsruhe.
- [19] Petersen C. (2012) *Stahlbau, Grundlagen der Berechnung und baulichen Ausbildung von Stahlbauten*, 4. Auflage, Springer Vieweg.
- [20] DIN EN 1991-1-4:2010-12 (2010) *Eurocode 1: Einwirkungen auf Tragwerke – Teil 1-4: Allgemeine Einwirkungen – Windlasten einschließlich DIN EN 1991-1-4/NA*, Beuth, Berlin.
- [21] Rosemeier, G. (1986) Zum Nachweis entkoppelter, winderregter Torsionsschwingungen bei Schrägseil- und Hängebrücken, *Stahlbau* **55** (5), 143–145.
- [22] <http://www.peil-ing.com/ingenieure/wind-ingenieurwesen>.
- [23] Schmidt, P. (2019) *Lastannahmen – Einwirkungen auf Tragwerke – Grundlagen und Anwendung nach EC 1*, Springer Vieweg.
- [24] Schütz, K. G. (2008) Schwingungsanfällige Zugglieder im Brückenbau, in *Stahlbau-Kalender 2008* (Hrsg. Kuhlmann, U.), Ernst & Sohn, Berlin.